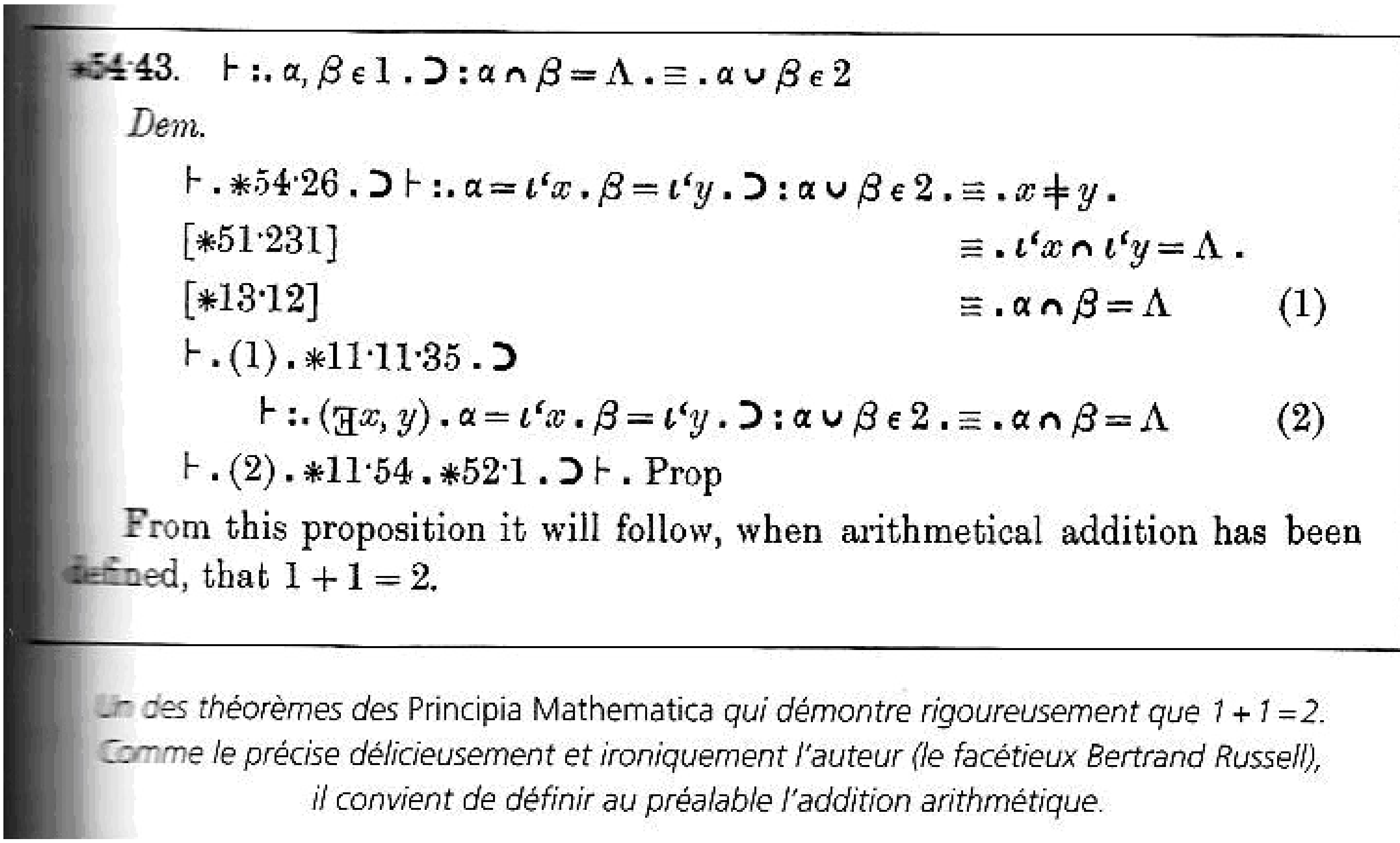
Divisibilité et congruences

Leçon 1
Math Xpertes- Lycée Gustave Eiffel - Bordeaux
Thierry Sageaux.

"La Mathématique est la reine des sciences et l'arithmétique est la reine des mathématiques." Carl Friedrich Gauss (1777-1855).



$*54{\cdot}43.\quad \vdash :. \alpha, \beta \in 1 . \supset : \alpha \cap \beta = \Lambda . \equiv . \alpha \cup \beta \in 2$

Dem.

$\vdash . *54{\cdot}26 . \supset \vdash :. \alpha = \iota' x . \beta = \iota' y . \supset : \alpha \cup \beta \in 2 . \equiv . x \neq y .$

$[*51{\cdot}231] \qquad \equiv . \iota' x \cap \iota' y = \Lambda .$

$[*13{\cdot}12] \qquad \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda \qquad (1)$

$\vdash . (1) . *11{\cdot}11{\cdot}35 . \supset$

$\vdash :. (\exists x, y) . \alpha = \iota' x . \beta = \iota' y . \supset : \alpha \cup \beta \in 2 . \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda \qquad (2)$

$\vdash . (2) . *11{\cdot}54 . *52{\cdot}1 . \supset \vdash .$ Prop

From this proposition it will follow, when arithmetical addition has been defined, that $1 + 1 = 2$.

Un des théorèmes des Principia Mathematica qui démontre rigoureusement que $1+1=2$. Comme le précise délicieusement et ironiquement l'auteur (le facétieux Bertrand Russell), il convient de définir au préalable l'addition arithmétique.

I Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

Définition 1.1 *Soient a et b deux entiers relatifs. On dit que a est un **multiple** de b s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = bk$. Si $b \neq 0$, on dit que b est un **diviseur** de a ou que a est **divisible** par b.*
On écrit $b|a$.

Remarque: Si un nombre entier $n \neq 0$ a une infinité de multiple, il possède, en revanche, un nombre fini de diviseurs, tous compris entre n et n.

Exercice 1. ♪
0 est-il divisble par 0 ?

Exercice 2. ♪
"Je suis multiple de tout entier mais je n'ai qu'un seul multiple". Qui suis-je ?

Exercice 3. ♩
Trouver $n \in \mathbb{N}$ tel que $n|n+8$.

Définition 1.2 *Deux nombres entiers sont* ***premiers entre eux****si et seulement si leurs diviseurs communs sont* -1 *et* 1.

Proposition 1.3 *Transitivité Soient* a, b *et* c *trois entiers relatifs avec* $b \neq 0$ *et* $c \neq 0$. *Si* $c|b$ *et si* $b|a$, *alors* $c|a$.

Démonstration: Exercice.

□

Attention ! La réciproque est fausse : $7|14$ et $7|49$, mais 14 ne divise pas 49.

Proposition 1.4 *Linéarité Soient* a, b *et* c *trois entiers relatifs avec* $c \neq 0$. *Si* $c|a$ *et si* $c|b$, *alors* $c|\alpha a + \beta b$ *pour tout* $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2$.

Autrement dit, c *divise toute combinaison linéaire (entière) de* a *et* b.

Démonstration: Exercice

□

Exercice 4. ♩
Montrer $2n + 1$ et $3n + 1$ sont premiers entre eux.

Exercice 5. 𝅗𝅥
Dans une liste de 51 nombres entiers compris entre 1 et 100, il y en a toujours un qui en divise un autre. Prouvez-le.

II Ecriture en base a

Tout le monde ne calcule pas en base 10.

Quand on écrit 153, il faut penser $153 = 1 \times 100 + 5 \times 10 + 3 \times 1$.

Mais si on choisit la base 10, c'est parce que l'on a 10 doigts. Que se serait-il passé si l'on avait été sur la planète Alcor où les ET ont 7 doigts ?

On aurait fait des paquets de 7, 49, 343...

Ce qui donne :

Exercice 6. ♪
Ecrire 371 en binaire, octal, duodécimal et en hexadécimal.

Exercice 7.
Ecrire 703 710 en hexadécimal.

Exercice 8. 𝅘𝅥𝅯
Effectuer les opérations suivantes : $(2301)_4 + (10223)_4$ et $(213)_4 \times (102)_4$.

Exercice 9. ♪
Trouver $a \in \mathbb{N}$ tel que $(5612)_a$ soit le plus petit possible et l'écrire en base 10.

Exercice 10. 𝅘𝅥𝅯
Trouvez $a \in \mathbb{N}$ tel que $(23)_{10} = (27)_a$.

Voici un Sudoku en hexadécimal :

		F	A	3		C	6		5		4		7	D	1
C			7		E	1		B		F				2	A
5		B	4	A			D				6	C			
						7			3	1		0		5	
1	B	6	8			0	9	C	A		3	E		F	
							F	E					9	0	8
F	A	C			D		8		9		5				
				6		A		1		2					4
	7				C	2		9					4		5
		5		9						C	D	6			
		9		1	F		A			4		3		7	0
6		4	D		3	E		7			2			B	
B	0	A					C	D	2	7	1		E	4	
			1	0					F				B		9
9	C			E		D	3		4		A	5			
		8	F			B	1	3			0			A	D

Have fun.

Brown's criterion : Pensez à un nombre entre 1 et 64. Indiquez les grilles sur lesquelles il se trouve. Je vous annonce votre nombre mystère en une fraction de seconde.

1	3	5	7	9	11	13	15
17	19	21	23	25	27	29	31
33	35	37	39	41	43	45	47
49	51	53	55	57	59	61	63

2	3	6	7	10	11	14	15
18	19	22	23	26	27	30	31
34	35	38	39	42	43	46	47
50	51	54	55	58	59	62	63

4	5	6	7	12	13	14	15
20	21	22	23	28	29	30	31
36	37	38	39	44	45	46	47
52	53	54	55	60	61	62	63

8	9	10	11	12	13	14	15
24	25	26	27	28	29	30	31
40	41	42	43	44	45	46	47
56	57	58	59	60	61	62	63

16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

Exercice 11. *Nombres de Harshad*[1]

Un nombre est dit nombre de Harshad s'il est divisible par la somme de ses chiffres.

N.B. : La notion de nombre de Harshad dépend donc de la base choisie !

1) Quel est le premier nombre de Harshad ?

2) Quel est le plus petit nombre qui ne soit pas de Harshad ?

3) Déterminer tous les nombres d'Harshad compris entre 11 et 100 (il y en a 22).

4) En base 10, les factorielles des nombres entiers inférieurs ou égaux à 431 sont de Harshad.

1. Le mathématicien indien Dattatreya Ramachandra Kaprekar (1905-1986) a donné ce nom à ces nombres. En sanskrit, cela signifie "Grande joie".

Montrer que 432! n'est pas de Harshad.[2]

III Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$ et congruences

Exercice 12.

Soit n l'année en cours. On effectue la division de n par 1, 2, ..., 1000. Quel est le plus grand reste obtenu ?

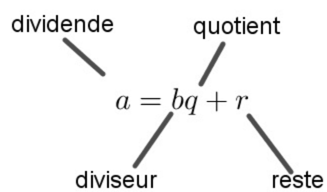
Proposition 1.5 *Soient a et b deux entiers relatifs, avec $b \neq 0$. Il existe un unique entier relatif q et un unique entier naturel r tels que*

$$\boxed{a = bq + r}$$

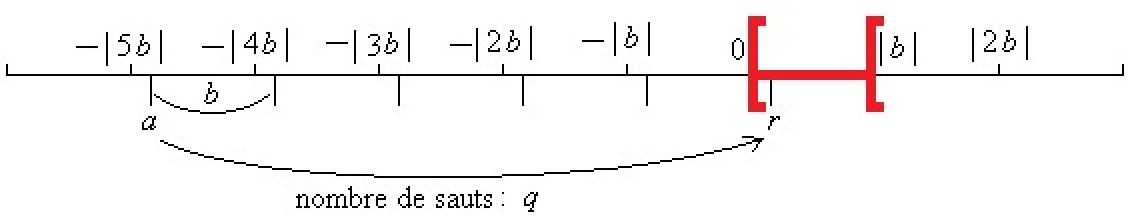
avec $0 \leq r < |b|$.

*On dit que l'on a effectué la **division euclidienne** de a par b.*

Un peu de vocabulaire ne peut pas faire de mal :



Voici comment il faut voir les choses : on joue à saute moutons avec les entiers :



Démonstration: Dans les problèmes d'existence et unicité, on commence toujours par l'existence (de peur d'avoir prouver l'unicité d'un truc qui n'existe pas...)

Existence : On suppose dans un premier temps a et b positifs. On note $n = \lfloor x \rfloor$ la partie entière de $x \in \mathbb{R}$, i.e. le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x. Donc $\boxed{n \leq x < n+1}$. On pose ensuite $q = \lfloor \frac{a}{b} \rfloor$ et $q \geq 0$. On a donc

$$q \leq \frac{a}{b} < q+1 \quad \Leftrightarrow \quad qb \leq a < b(q+1) \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq a - bq < b$$

On appelle $r = a - bq$ et on a gagné.

Le cas général est dérivé de celui-ci et ne pose pas de problème.

Unicité : Par l'absurde comme toujours : S'il existe deux solutions distinctes au problème posé (q, r) et (q', r'), alors

2. Cooper et Kennedy ont démontré qu'en base 10, il existe 20 entiers consécutifs de Harshad ($> 10^{44\,363\,342\,786}$), mais pas 21.

$$bq + r = bq' + r' \quad \Rightarrow \quad b(q' - q) = r - r'$$

Donc b divise $r - r'$. Ce qui n'est possible que si $r - r' = 0$ car $-b < r - r' < b$. Ainsi $r = r'$.
Et d'après notre première égalité, $q = q'$. Contradiction.

□

Exercice 13. ♪
Faire la division euclidienne de -15 par 7.

Exercice 14. ♩
Montrer que $6|(n^3 - n)$.

Exercice 15. ♩
Legolas comptent le nombre d'orcs tués lors de la bataille alors que Gandalf comptent le nombre de résurrections humaines auxquelles il se livre. Ils comptent ensemble, à haute voix, toutes les secondes. Legolas commence à 191 et en tue 4 par seconde tandis que Gandalf part de 848 hommes morts et en ressuscite 15 par seconde.
Quelle est la plus petite différence entre deux nombres qu'ils prononcent au même instant ?

Définition 1.6 *Deux nombres relatifs a et c sont dits* ***congrus modulo*** *b (un entier naturel non nul) s'ils ont même reste dans la division euclidienne par b. On note*

$$\boxed{a \equiv c \quad (b)}$$

En particulier, si $a = bq + r$ est la division euclidienne de a par b, alors on a

$$\boxed{a \equiv r \quad (b)}$$

Analogie avec le piano : Sur un piano, les notes désignent les entiers et on travaille modulo 12 (nombre de notes sur une gamme). Ainsi, deux "La" ont la même congruence modulo la gamme. Si on choisit une octave, on dit que le "La" est sur cette octave a le même reste dans la division modulo 12.

Voir Science étonnante # 41 sur $3^{12} = 2^{19}$.

Analogie avec le cercle trigonométrique : Sur le cercle, quand on enroule la droite réelle, on fait la division euclodoenne des angles (les réels) modulo 2π. De la même façon, on aurait pu précédemment enrouler le clavier du piano autour d'une octave, mais c'est plus dur...
Pour cette raison, la notation $\theta \equiv \frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$ est logique pour les angles !

Remarque: En étudiant les trajectoires des planètes et les congruences, en 1929, Képler prédit le transit de vénus et mercure devant le soleil en 1931. Il meurt en 1930 ?

Exercice 16. ♪
Montrer que $a \equiv c \quad (b) \quad \Leftrightarrow \quad c \equiv a \quad (b)$

Exercice 17. ♪
Déterminer si les congruences suivantes sont correctes ou pas.
1) $1747 \equiv 31 \quad (44)$,
2) $663 \equiv -34 \quad (17)$,
3) $-625 \equiv -562 \quad (23)$,

Exercice 18. ♩ *Jeu de Nim de Fort Boyard*
On dispose 21 bâtons de craie face aux deux joueurs. Chacun à son tour peut enlever 1, 2 ou 3 bâtons. Celui qui enlève le dernier bâton a perdu.
Trouver une stratégie gagnante.

Exercice 19. ♩ *Variante du précédent*
Adrien et Bérénice joue au jeu suivant : ils choisissent à tour de rôle un nombre parmi $\{1, 8, 11\}$, l'annonce et l'ajoute au total précédent. Le premier qui atteint 2019 a gagné. Adrien vient d'annoncer 92. Qui va gagner ?

Proposition 1.7 *Transitivité Soient a, b et c trois entiers relatifs et soit d un entier relatif non nul.*
Si $a \equiv b \quad (d)$ et $b \equiv c \quad (d)$, alors $a \equiv c \quad (d)$.

Démonstration: Exercice.

□

Proposition 1.8 *Soient a, a', b, b' et c des entiers relatifs et si $c \neq 0$, alors, en supposant, que $a \equiv a' \quad (c)$ et $b \equiv b' \quad (c)$, on a*

$$a + b \equiv a' + b' \quad (c) \quad a - b \equiv a' - b' \quad (c) \quad ab \equiv a'b' \quad (c) \quad a^n \equiv a'^n \quad (c) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Si $a \equiv b \quad (d)$ et $b \equiv c \quad (d)$, alors $a \equiv c \quad (d)$.

Démonstration: Exercice.

□

Exercice 20. *Un must !*
Quel est le reste de $a = 352^{14\ 546}$ dans la division par 5 ?

Exercice 21. ♩
Sur un tableau, on écrit les nombres entiers de 1 à 2022. On choisit deux de ces nombres et on écrit leur différence. On recommence jusqu'à n'avoir qu'un seul nombre. Montrer que, quel que soit le choix des paires de nombres, le dernier nombre obtenu est impair.

Exercice 22. ♩
On pose $A = 4444^{4444}$, B la somme des chiffres de A, C la somme des chiffres de B et D la somme des chiffres de C.
Que vaut D ?

Exercice 23. ♩
On dispose de 100 ampoules, numérotées de 1 à 100, chacune pouvant être soit allumée, soit éteinte. Ces ampoules sont reliées à trois interrupteurs A, B et C.

- En appuyant sur A, on change l'état de chacune des ampoules.

- En appuyant sur B, on ne change l'état que des ampoules impaires.
- En appuyant sur C, on ne change que l'état des ampoules de type $3n+1$.

Au début de la soirée, toutes les ampoules étaient allumées. Mais, au cours de la soirée, Cupidon (qui est pété comme un coing) a appuyé 1000 fois, de façon aléatoire, sur les interrupteurs. Enfin de soirée, les ampoules 95 et 96 sont éteintes.
Combien d'ampoules sont encore allumées ?

Exercice 24. 𝅗𝅥

Cent indiens sont en file indienne. Ils ont chacun une plume de couleur sur la tête. Il y a cinq couleurs au total. Chaque indien voit les plumes de tous ceux qui sont devant lui mais pas de ceux qui sont derrière lui. On commence par le dernier. S'il réussit à annoncer à haute voix la couleur de sa plume, il a la vie sauve. Et on continue jusqu'au premier de la file.
Trouver la stratégie pour qu'il y ait un maximum de vies sauvées.

IV Critères de divisibilité

Dans toute la suite, on note $\alpha = (a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)_{10}$ et on cherche à savoir s'il est divisible par un entier b.

IV.1 Divisibilité par $b = 2$

$$\boxed{2|\alpha \quad \Leftrightarrow \quad 2|a_0}$$

En effet, on écrit $a_0 = 2a_0'$ et on trouve $\alpha = 2 \times (a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0')_{10}$.

IV.2 Divisibilité par $b = 3$

$$\boxed{3|\alpha \quad \Leftrightarrow \quad 3|\sum_{k=0}^{n} a_k}$$

On a $\alpha \equiv \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \quad (3)$ car $10^k \equiv 1 \quad (3)$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. D'où l'équivalence.

IV.3 Divisibilité par $b = 4$

$$\boxed{4|\alpha \quad \Leftrightarrow \quad 4|(a_1 a_0)_{10}}$$

Faire la démo en s'inspirant de $b = 2$.

IV.4 Divisibilité par $b = 5$

$$\boxed{5|\alpha \quad \Leftrightarrow \quad 5|a_0}$$

Idem

IV.5 Divisibilité par $b = 6$

$$\boxed{6|\alpha \quad \Leftrightarrow \quad 3|\alpha \text{ et } 2|\alpha}$$

Pour être tout à fait complet, on a besoin de l'unicité de la décomposition en facteurs premiers pour celui-ci.

IV.6 Divisibilité par $b = 7$

$$\boxed{7|\alpha \quad \Leftrightarrow \quad 7|(a_n a_{n-1} \dots a_1)_{10} - 2a_0}$$

En effet, essayons avec 231 puis 154 128 163.

On écrit $\alpha = (a_n a_{n-1} \dots a_1)_{10} \times 10 + a_0$. Donc $-2\alpha = -20 \times (a_n a_{n-1} \dots a_1)_{10} - 2a_0$. Sauf que $-20 \equiv 1 \quad (7)$. On en conclut que $-2\alpha \equiv (a_n a_{n-1} \dots a_1)_{10} - 2a_0 \quad (7)$.
Ainsi, 7 divise $(a_n a_{n-1} \dots a_1)_{10} - 2a_0$ si et seulement si 7 divise -2α. Pour conclure, on va avoir besoin du lemme de Gauss qui assure que $7|\alpha$ car 7 et 2 sont premiers entre eux.

Exercice 25. *Une variante sur les gros nombres.*

Prenons un exemple avec $\alpha = 5\ 527\ 579\ 818\ 992$.

On calcule $\beta = 5 - 527 + 579 - 818 + 992 = 231$ en découpant en tranche de 3 chiffres et en commençant par un "-". Comme $7|\beta$, alors $7|\alpha$.

IV.7 Divisibilité par $b = 8$

$$\boxed{8|\alpha \quad \Leftrightarrow \quad 8|(a_2 a_1 a_0}$$

Voir le critère de divisibilité par 4.

IV.8 Divisibilité par $b = 9$

$$\boxed{9|\alpha \quad \Leftrightarrow \quad 9|\sum_{k=0}^{n} a_k}$$

Même idée que pour $b = 3$ en voyant que $10^k \equiv 1 \quad (3)$.

IV.9 Divisibilité par $b = 10$

$$\boxed{10|\alpha \quad \Leftrightarrow \quad a_0 = 0}$$

Prouvez-le.

IV.10 Divisibilité par $b = 11$

$$\boxed{11|\alpha \quad \Leftrightarrow \quad 11|\left(\sum_{k \text{ pair}} a_k - \sum_{k \text{ impair}} a_k\right)}$$

On utilise le fait que $10^k \equiv (-1)^k \quad (11)$ d'où l'alternance de signes.

Exercice 26. ♪

1) Mon nombre s'écrit en écriture décimale $n = 16\ 911\ 461\ 672\ 321\ 53\alpha$ où α est un chiffre. Déterminer α pour que n soit divisible par 33

2) Peut-on toujours compléter un nombre du type précédent de façon à ce qu'il soit divisible par 11 ?

IV.11 Divisibilité par $b = 13$

$$\boxed{13|\alpha \quad \Leftrightarrow \quad 13|(a_n a_{n-1} \dots a_1)_{10} + 4a_0}$$

Même idée que pour 7 en remarquant que $40 \equiv 1 \quad (13)$.

IV.12 Divisibilité par $b = 17$

$$\boxed{17|\alpha \quad \Leftrightarrow \quad 17|(a_na_{n-1}\dots a_1)_{10} - 5a_0}$$

IV.13 Divisibilité par $b = 19$

$$\boxed{19|\alpha \quad \Leftrightarrow \quad 19|(a_na_{n-1}\dots a_1)_{10} + 2a_0}$$

IV.14 Divisibilité par $b = 23$

$$\boxed{23|\alpha \quad \Leftrightarrow \quad 23|(a_na_{n-1}\dots a_1)_{10} + 7a_0}$$

IV.15 Divisibilité par $b = 29$

$$\boxed{29|\alpha \quad \Leftrightarrow \quad 29|(a_na_{n-1}\dots a_1)_{10} + 3a_0}$$

IV.16 Divisibilité par $b = 31$

$$\boxed{31|\alpha \quad \Leftrightarrow \quad 31|(a_na_{n-1}\dots a_1)_{10} - 3a_0}$$

IV.17 Divisibilité par $b = 37$

$$\boxed{37|\alpha \quad \Leftrightarrow \quad 37|(a_na_{n-1}\dots a_1)_{10} + 11a_0}$$

On commence à atteindre les limites du système...

IV.18 Divisibilité par $b = 41$

$$\boxed{41|\alpha \quad \Leftrightarrow \quad 41|(a_na_{n-1}\dots a_1)_{10} - 4a_0}$$

Exercice 27. ♪ *Franz Schubert est né le* 31 *janvier* 1797*. Il a vécu moins d'un siècle mais plus d'un quart de siècle. Il est décédé un* 19 *novembre.*

Son âge, quand il est mort n'était divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5, ni par 7. L'année de sa mort fut une année bissextile non divisible par 5 et nous fêterons le bicentenaire de sa mort lors d'une année divisible par 3 et 13.

Quand est-il mort ?

Exercice 28. 𝅗𝅥

Soit n une entier compris entre 2 et 11. trouvez tous les nombres de n chiffres au plus, ne s'écrivant qu'avec des 1 et des 0 et divisibles par n.

Les temps sont comptés

Le découpage de base

On commence par découper en année : avec un minimum d'observation, il est assez normal de prendre en compte les saisons. L'agriculture en est tributaire et il est naturel de découper en quatre saisons ce que l'on assimile à un cycle d'un an. (sans même savoir à la base qu'il s'agit de la période de rotation de la Terre autour du Soleil).

On divise ensuite les saisons en mois (ce n'est pas aussi simple que cela comme on va le voir plus loin).

Quant aux jours, impossible de rater le cycle du Soleil.

Il reste à fractionner les jours.

Naturellement, les gens qui s'intéresse à ce type de problème sont les astronomes, et les premiers d'entre eux, les Babyloniens. A noter que la recherche de cycles et l'étude des planètes sont très liées aux angles : si vous viser une étoile, autant avoir le bon angle (et d'être précis).

Ils ont donc dû trouver une base de calcul. On va le voir, ils comptaient en base 12 ; si vous ajoutez les 4 saisons, la lunaison à 30 jours, l'année à 360 jours, il est assez naturel de compter en base 60 qui multiple ou diviseur de tous ces nombres. C'est ce que l'on appelle la base sexagésimale (Don Cassius au II^{e} avant J.-C.).

A noter que la période des menstruations de la femme est en moyenne de 28 jours avec un delta de 30 jours et cela n'a rien à voir avec la Lune comme le pensaient les anciens. Pour vous en convaincre, sachez que les autres animaux ont des périodes de menstruations toutes différentes (22 jours pour l'éléphante).

La journée

Commençons par les heures : Pourquoi 24 heures dans une journée ?

C'est pas trop "base-10" friendly ça ! !

En fait, les Sumériens et les Babyloniens (III^{e} et II^{e} siècle avant J.-C.) comptaient en base 60 (ce qui explique les minutes et secondes au passage). Hormis le fait que 60 a plein de diviseurs, ce qui est très pratique, mais pourquoi donc 60 ?

Il s'agit d'un héritage des Sumériens et des Babyloniens (III^{e} et II^{e} siècle avant J.-C.). Ils comptaient sur leurs phalanges. Utilisez votre pouce pour dénombrer vos phalanges sur la même main : trois pour l'index, trois pour le majeur... 12 phalanges.

En revanche, si je veux compter un découpage de la journée ; appelons ça des heures au hasard. Je vais compter sur mes phalanges pour le jour, soit 12 heures et idem pour la nuit. Et voila nos $24h$.

La semaine

C'est quoi cette histoire de semaine de 7 jours. Non mais, sans déconner, 7...

Cela découle de la division de la journée en $24h$.

En effet, à l'époque des Babyloniens, il n'y a pas beaucoup d'astres connus : la lune, le Soleil et les cinq planètes les plus proches de nous (Mercure, Vénus, Mars, Jupiter et Saturne), toutes observables à l'œil nu.

Au passage, Uranus n'a été découverte qu'en 1781 par Herschel et Neptune en 1846 par Le Verrier toutes deux à la lunette astronomique. Quant à Pluton (la seule découverte par les américains en 1930, elle a été déclassé et n'est plus une planète, juste une naine ; shame !o)

Et voila les noms de noms jours de la semaine :

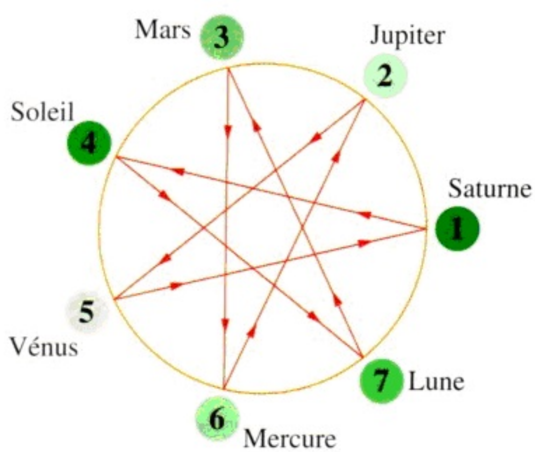
- Lune a donné Lundi (Monday en anglais pour Moon),
- Mars a donné Mardi (Tuesday de Tiw, le Dieu germain de la guerre),
- Mercure a donné Mercredi (Wednesday de Woden, le Dieu messager germain),

- Jupiter a donné Jeudi (Thursday pour Thor),
- Venus a donné Vendredi (Friday pour la Déesse Frigg),
- Saturne n'a pas donné Samedi (Saturday en anglais)... en fait, pour être précis, "samedi" vient d'une déformation du grec "sabbati dies" (le jour du shabbat - ce dernier signifiant "septième jour de la semaine") avec l'ancien français "seme" (septième - pour le rang du jour de la semaine qui commençait au dimanche).
- Le Soleil n'a pas donné Dimanche (il reste Sunday en anglais) qui vient de "Dies Dominicus", le jour du Seigneur, imposé par les chrétiens en France au XII^e siècle.

Mais si ceci explique les noms et le nombre de jours de la semaine, on ne comprend toujours pas pour quoi ils sont dans cet ordre ?!...

Accrochez-vous, il va y avoir un peu de mathématiques :

On va commencer par classer ces sept astres dans l'ordre croissant de leur distance à la Terre : Lune (300 000km), Vénus (41 000 000km), Mercure (92 000 000km), Soleil (150 000 000km), Mars (225 000 000km), Jupiter (588 à 968 000 000km), Saturne (1 200 à 1 700 000 000km). Mais ce sont des distances moyennes modernes ne tenant compte que du rayon de l'orbite solaire. Avec les calculs de l'Antiquité, on trouve que Mercure est plus proche de nous que Vénus (d'ailleurs certains astronomes demandent que l'on cesse de dire que Vénus est la plus proche de nous !)



Imaginons maintenant que vous comptez les heures de la journée en suivant les astres : La première heure du jour correspond au Soleil, la seconde à Vénus, la troisième à Mercure et ainsi de suite jusqu'à la huitième qui revient sur le Soleil. On repasse par le Soleil à la quinzième et à la vingt-deuxième. Arrive la vingt-quatrième heure de la journée qui pointe sur Mercure. Le nouveau jour qui commence débutera par la première heure qui donne la lune d'après notre diagramme.

On continue à tourner sans fin. Notre journée prend alors le nom de l'astre de la première heure : on a commencé par un jour du Soleil, suivra un jour de la Lune, puis Mars, Mercure, Jupiter, Vénus, Saturne et on recommence.

N.B. A l'époque, si vous souhaitez donner rendez-vous à quelqu'un, c'est un peu difficile : On est le jour du Soleil et on se retrouve au prochain jour de Vénus à la troisième heure de Mercure chez Sémiramis (soit vendredi 16h). Tout est affaire de congruences.

Les mois

Le découpage en période d'à peu près 30 jours s'explique par la lunaison (29 jours et 12h). D'ailleurs, "Month" en anglais vient de "Moon". Si l'on considère une année d'à peu près 360 jours, on a nos 12 mois.

En fait, ce n'est pas si simple que ça... En 753 av. J.-C., à la création de Rome, les Romains établissent un calendrier lunaire qui comptait dix mois (cinq mois de 29 jours et cinq mois de 30 jours, soit 295 jours). Ils les nommèrent en hommage aux Dieux :

- Martius (pour commencer par Mars et la guerre - moment où l'hiver est passé et où l'on peut reprendre les hostilités),
- Aprilus (pour Aphrodite, dite Aprus en étrusque),
- Maius (pour Maïa, déesse du printemps, une des pléiades, fille d'Atlas et mère d'Hermès),
- Junius (pour Junon),
- Quintilus (pour *quintus*, cinquième),
- Sextilus (pour *sextus*, sixième),
- September (vient de *septem mensis ab imber*, septième mois après l'hiver),
- October (pour *octo*, huitième),
- November (pour *novem*, neuvième),
- December (pour *decem*, dixième).

L'année étant trop courte, ils décidèrent, sous le règne de Numa Pompilus (700 av. J.-C.) de rajouter deux mois de 30 jours :

- Januaris (qui vient de Janus, Dieu du commencement, gardien de portes)
- Februaris (signifiant purification)

D'abord placé à la fin de l'année, ils furent mis au début de l'hiver quand les jours commencent à rallonger.

Selon la croyance populaire, les nombres impairs plaisaient aux Dieux. il fut donc décidé d'attribuer un nombre impair de jours à chaque mois : Januaris 29, Februaris 28, Martius 31, Aprilis 29, Maius 31, Junius 29, Quintilis 31, Sextilis 29, September 29, October 31, November 29, December 29. Mais il manquait encore 11 jours qui sont rattrapés (quand on y pense) avec des mois de 22 jours rajoutés en fin d'année...

Cela ne peut pas durer et Jules César prend les choses en main et impose : Januaris 31, Februaris 29, Martius 31, Aprilis 30, Maius 31, Junius 30, Quintilis 31, Sextilis 30, September 30, October 31, November 30, December 31, soit 365 jours.

Les années

Mais il y a encore un décalage, alors César demande conseil à Sosigène d'Alexandrie en 46 av. J.-C. Celui-ci mesure une rotation terrestre de $365,25$ jours. Il propose donc de rajouter un jour tous les quatre ans au mois qui en avait le moins : Februaris. Afin de ne pas perturber tout le monde, il fut décidé de doubler un jour, de préférence un jour de fête : le 23, soit le sixième jour avant le premier Martius, "ante diem bis sextum kalendas martias" - i.e. on double le sixième jour avant les calendes de mars (le premier jour de mars).

En 44 av. J.-C., Qunitilis est rebaptisé Julius en l'honneur de César et en 8 av. J.-C., Sextilis devient Augustus en l'honneur de l'empereur Auguste.

A la fin de l'Antiquité, on a donc un calendrier de 12 mois avec 365 jours et des années bissextiles tous les quatre ans.

Mais, une année correspond à la période de rotation de la Terre autour du Soleil, soit $365,24220$ jours pour être précis.

Sur $q = 10\ 000$ ans, cela correspond à 7 578 ans à 365 jours et $p = 2\ 422$ à 366 jours, soit $\dfrac{p}{q} = 0,2422$.

Sosigène a choisi $\dfrac{p}{q} = \dfrac{1}{4}$.

Mais cela fait $2500 - 2422 = 78$ années de 366 de trop tous les 10 000 ans.

Le décalage devient intenable et en 1582 le Pape Grégoire XIII décide que le lendemain du jeudi 4 octobre sera le vendredi 15 octobre (tout cela pour recaler la date de Pâques!!). Mais tout le monde ne l'applique pas de suite : Si Henri II, roi de France, l'adopte la même année le 9 décembre 1582 en décidant que le lendemain serait le 20 décembre, Montaigne en parle dans les *Essais* et explique combien cela fut difficile. Les anglo-saxons, qui étaient protestants ne l'ont adopté qu'en 1752 (avec des émeutes car les loyers furent payés sur un mois de 21 jours). [3] Quant aux Russes, orthodoxes, ils attendirent la révolution de 1917 pour faire comme les autres.

Le pape Grégoire ne se contenta pas de recaler le calendrier. Il régla aussi le problème du décalage de 78 jours afin que cela ne se reproduise plus : il décide que les siècles ne sont plus bissextiles. Sur 10 000 ans, cela donne $100 - 78 = 22$ jours de retard. Et pour combler ce retard, les années multiples de 400 restent bissextiles, soit 25 jours de plus. Au final, on arrive à $25 - 22 = 3$ jours de trop.

On en est resté là car il y a d'autres paramètres qui entrent en ligne de compte comme le raccourcissement de l'année tropique de $0,5$ secondes par siècle et l'allongement du jour de $1,64$ millisec par siècle. Depuis, on rectifie chaque année le décalage en ajoutant au besoin une seconde dans la nuit du 31 décembre au 1er janvier, la décision venant du Bureau International des Poids et Mesures situé à Sèvres en France.

Une curiosité

Les triskaidekaphobes ont peur du nombre 13. L'origine vient sans doute de Judas lors de la cène.

Les paraskevidekatriaphobes ont peur du vendredi 13. A la suite de la cène, le Christ aurait été crucifié un vendredi 13... pas sûr. Mais surtout, le vendredi 13 octobre 1307, Philippe le Bel fait arrêter et torturer les Templiers parmi lesquels leur Grand Maître, Jacques de Molay.

Ces derniers sont inquiets. Il paraît qu'il y aurait plus de vendredis 13 que la logique ne le laisserait prévoir.... Et c'est vrai :

Une règle simple dit que le 13 du mois est un vendredi une fois sur 7 en moyenne, soit une fréquence annuelle estimée de $12/7 \simeq 1,714$.

Mais si l'on compte plus précisément, on cherche un cycle et, d'après ce qui précède, le calendrier grégorien est périodique de période 400 ans. Sur cette période, il y a $365 \times 400 + 100 - 4 + 1 = 146\ 097$ jours. Or il se trouve que $146\ 097 = 20\ 871 \times 7$, soit un nombre entier de semaine. Donc la période de 400 ans est aussi une période de 20 871 semaines.

On dénombre ensuite de façon empirique : lundis 13, 685 ; mardis 13, 685 ; mercredis 13, 687 ; jeudis 13, 684 ; vendredis 13, 688 ; samedis 13, 684 ; dimanches 13, 687.

La fréquence calculée est de $1,72$!!

Comment calculer le jour de la semaine

On imagine que l'on cherche le jour de la semaine d'une date fixée. On note

y l'année, m le mois et d le jour dans le mois.

Les formules bruts sont

$$\boxed{D \equiv d + y + \left\lfloor \frac{y}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{y}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{y}{400} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{23m}{9} \right\rfloor + 2 \pmod 7} \qquad \text{si } m \geq 3,$$

$$\boxed{D \equiv d + (y-1) + \left\lfloor \frac{y-1}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{y-1}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{y-1}{400} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{23m}{9} \right\rfloor + 5 \pmod 7} \qquad \text{si } m < 3.$$

3. Une anecdote classique à ce sujet est que Newton serait né le 25 décembre 1642 si l'on en croit son tombeau, mais en 1643 d'après le calendrier grégorien.

Le 0 représente dimanche, le 1 le lundi et ainsi de suite.

Vous pouvez apprendre par cœur ces formules, mais je propose de les simplifier.
On peut commencer par calculer les deux derniers termes de la formule :

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\delta = \left\lfloor \frac{23m}{9} \right\rfloor + \alpha$	6	2	2	5	0	3	5	1	4	6	2	4

avec $\alpha \in \{2, 5\}$ en fonction de m.

Si la date cherchée est après l'an 2001, on peut encore simplifier en écrivant $y = 2000 + y'$ car

$$y + \left\lfloor \frac{y}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{y}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{y}{400} \right\rfloor = 2000 + y' + 500 + \left\lfloor \frac{y'}{4} \right\rfloor - 20 - \underbrace{\left\lfloor \frac{y'}{100} \right\rfloor}_{=0} + 5 + \underbrace{\left\lfloor \frac{y'}{400} \right\rfloor}_{=0}$$

et comme $2000 + 500 - 20 + 5 \equiv 0 \ (7)$, on trouve la forme simplifiée :

$$\boxed{D \equiv d + y' + \left\lfloor \frac{y'}{4} \right\rfloor + \delta \pmod 7} \qquad \text{si } m \geq 3,$$

$$\boxed{D \equiv d + (y' - 1) + \left\lfloor \frac{y' - 1}{4} \right\rfloor + \delta \pmod 7} \qquad \text{si } m < 3.$$