Complexes I

Leçon 2
Math Xpertes- Lycée Gustave Eiffel - Bordeaux
Thierry Sageaux.

"Il n'y a pas de plaisir plus complexe que celui de la pensée." Jorge Luis Borgès (1899-1986).

Résoudre $x+2=3$, on trouve une solution $x=1\in\mathbb{N}$.
Résoudre $x+3=2$, on trouve une solution $x=-1\in\mathbb{Z}$.
Résoudre $3x=2$, on trouve une solution $x=\dfrac{2}{3}\in\mathbb{Q}$.
Résoudre $x^2=3$, on trouve deux solutions $x=\pm\sqrt{3}\in\mathbb{R}$.
Résoudre $x^2+3=0$, on trouve pas car $\mathbb{R}$ est trop petit...

Adriaan Roomen (1561 - 1615) François Viète (1540 - 1603)

$$\begin{aligned}
&x^{45}-45x^{43}+945x^{41}-12'300x^{39}+111'150x^{37}-740'259x^{35}+3'764'565x^{33}-14'945'040x^{31}\\
&+46'955'700x^{29}-117'679'100x^{27}+236'030'652x^{25}-378'658'800x^{23}+483'841'800x^{21}\\
&-488'494'125x^{19}+384'942'375x^{17}-232'676'280x^{15}+105'306'075x^{13}-34'512'075x^{11}\\
&+7'811'375x^{9}-1'138'500x^{7}+95'634x^{5}-3'795x^{3}+45x\\
&=\sqrt{\frac{7}{4}-\sqrt{\frac{5}{16}}-\sqrt{\frac{15}{8}-\sqrt{\frac{45}{64}}}}
\end{aligned}$$

Etymologie : On a besoin de nouveaux nombres qui sont tour à tour appelés *impossibles* (Girard (1595-1632) à qui on doit aussi les abréviations sin, tan et sec) puis *imaginaires* (dans le sens d'une image simulée par l'esprit) avant que Descartes ne donne une dimension humaine à l'objet en 1637.

Euler (1707-1783) écrit en 1749 ses "Recherches sur les racines imaginaires des équations". C'est le premier qui en donne la définition : "On nomme quantité imaginaire celle qui n'est ni plus grande que zéro, ni plus petite que zéro ; ce sera quelque chose d'impossible, comme $\sqrt{-1}$."

C'est vers 1830 que Gauss (1777-1855) donne une construction effective qui fait des réels un cas particulier des complexes. Il abandonne donc définitivement le terme d'imaginaire.

Le mot *complexus* vient de *cum*, avec ou ensemble, et d'une racine signifiant plier. Il est issu du participe passé d'un verbe qui signifiait entourer. Le mot apparaît en France au XIV^e siècle, évoquant un ensemble de choses différentes.

I $\mathbb{R}$ est trop petit

L'impossibilité de résoudre une équation aussi simple que $x^2+1=0$ nous impose la création d'un nouveau nombre.[1]

Définition 2.1 *On appelle **nombre complexe** tout nombre de la forme $z=a+ib$, avec $\boxed{i^2=-1}$, $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.*

*On parle de **forme algébrique**.*

*Le nombre a s'appelle la **partie réelle** de z que l'on note $\mathscr{R}(z)=a$ et le nombre b s'appelle la **partie imaginaire** de z notée $\mathscr{I}(z)=b$.*

L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

Blague : Quel est le nombre le plus laid ? -1 car il est hideux (i^2).

Remarque: On a clairement $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$ (il suffit de prendre la partie imaginaire nulle.

Exemples: $i,\ 1+i,\ 1+i\sqrt{2},\ i\sqrt{3},\ i\pi,\ 17...$

Blague : Qu'est-ce qu'un homme complexe dit à une femme réelle ? Viens danser.

Définition 2.2 *Si $\mathscr{R}(z)=0$, on dit que z est un **imaginaire pur**.*

Attention ! La partie imaginaire est un réel ! ! (pas ib).

II Règles de calcul

En prolongeant les opérations classiques de $\mathbb{R}$, on obtient :

Définition 2.3 *Soient $z=a+ib$, $z'=a'+ib'$ et $\lambda\in\mathbb{R}$ alors*

- $z+z'=(a+a')+i(b+b')$,
- $\lambda z=\lambda a+i\lambda b$,
- $zz'=(aa'-bb')+i(ab'+a'b)$.

Exercice 1.
Développer et simplifier $(2+\sqrt{3})(2+i\sqrt{3})(-1+i)+7+4\sqrt{3}$.

Proposition 2.4 *(Unicité de l'écriture) L'écriture d'un complexe sous la forme algébrique est unique : Si $a+ib=a'+ib'$ avec $(a,a',b,b')\in\mathbb{R}^4$ alors $a=a'$ et $b=b'$.*

Démonstration: On a $a-a'=i(b'-b)$.

- Si $b-b'=0$, alors $b=b'$ et $a=a'$.
- Sinon, on peut écrire $i=\dfrac{a-a'}{b'-b}\in\mathbb{R}$. Contradiction avec la définition de $i\notin\mathbb{R}$.

□

Proposition 2.5 *(Intégrité) Si $zz'=0$ alors $z=0$ ou $z'=0$.*

1. En 1777, Euler choisit i pour notation.

Démonstration: D'après la définition du produit, on a $zz' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b) = 0$. Or l'unicité de l'écriture d'un complexe impose $aa' - bb' = 0$ et $ab' + a'b = 0$.

- Si $a = a'$; alors la première équation donne $bb' = 0$, donc soit $z = 0$, soit $z' = 0$.
- Si $a' \neq 0$ (idem si $a \neq 0$), alors on peut écrire $a = \dfrac{bb'}{a'}$ et $\dfrac{bb'^2}{a'} + a'b = 0 \Rightarrow b\underbrace{(b'^2 + a'^2)}_{>0} = 0$. Donc

$b = 0$ et $z = 0$.

Proposition 2.6 *Si $k \in \mathbb{N}$, alors*

$$i^k = \begin{cases} 1 & si\ k \equiv 0\ (4) \\ i & si\ k \equiv 1\ (4) \\ -1 & si\ k \equiv 2\ (4) \\ -i & si\ k \equiv 3\ (4) \end{cases}$$

Essayer de résoudre $x^2 + 3 = 0$.

Lemme 2.7 *Le polynôme $x^2 + c$ avec $c > 0$ a deux racines complexes $\pm i\sqrt{c}$.*

Essayons maintenant avec $x^2 + x + 1 = 0$. (Le carré incomplet d'Al Kwarismi).

Proposition 2.8 *Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$. Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, alors il existe $\delta \in \mathbb{C}$ tel que $\delta^2 = \Delta$ et les deux racines complexes de P sont $z_1 = \dfrac{-b+\delta}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b-\delta}{2a}$.*

Exercice 2.
Résoudre
1) $z^3 + 5z^2 + 11z + 15 = 0$,
2) $z^2 + (1+i)z + i = 0$,
3) $z^3 - (2+i)z^2 + 2(1-i)z - 2i = 0$ sachant qu'il y a une racine imaginaire pure.

III Le plan d'Argand-Cauchy

Jean-Robert Argand (1768-1822), mathématicien suisse à qui l'on doit l'interprétation géométrique des complexes en 1805. Gauss la développa en 1811 ainsi que Cauchy par la suite. En fait, la représentation géométrique est due à Wessel, mais on ne trouvera ses travaux qu'en 1897.

Les réels se représentent par une droite. Si $z = a + ib$, alors on a deux nombres réels, d'où l'idée du **plan complexe**.

Par exemple, le complexe $z = 2 + i$ est alors représenté par le point de coordonnées $(2; 1)$.

L'axe des abscisses est appelé **l'axe réel** et celui des ordonnées, **l'axe imaginaire** (c'est là que se trouvent les imaginaires purs).

On établit donc une bijection naturelle entre les points du plan et les complexes :

$$\begin{array}{cccc} \text{aff}: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & M(a,b) & \longmapsto & z = a + ib \end{array}$$

L'unicité de l'écriture sous forme algébrique prouvée en 2.4 montre bien que l'application précédente est une injection. La surjection est évidente.

Définition 2.9 *Le complexe z s'appelle **l'affixe** du point M. On le note aff(M).*

Etymologie : vient du latin *affixus* (participe passé de *affigere* qui signifie attacher). En grammaire, c'est un mot masculin qui désigne de façon générique un suffixe, un préfixe ou un infixe. En mathématiques, il es féminin et n'est introduit qu'au XIXe siècle.

En s'appuyant sur ce qui a été fait les années précédentes, on peut étendre l'affixe d'un point à l'affixe d'un vecteur via $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Définition 2.10 *Si z est l'affixe du point M, on définit l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$ par aff$(\overrightarrow{OM}) = z$.*

Proposition 2.11 *Si z et z' sont les affixes respectives de M et M', alors le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour affixe $z' - z$. On note aff$(\overrightarrow{MM'}) = z' - z$.*

Just do it.

Autant la représentation graphique permet de comprendre la somme de deux complexes, autant pour le produit, c'est (pour l'instant) une catastrophe.

Remarque: En 1811, Gauss munit $\mathbb{R}^2$ des opérations suivantes :

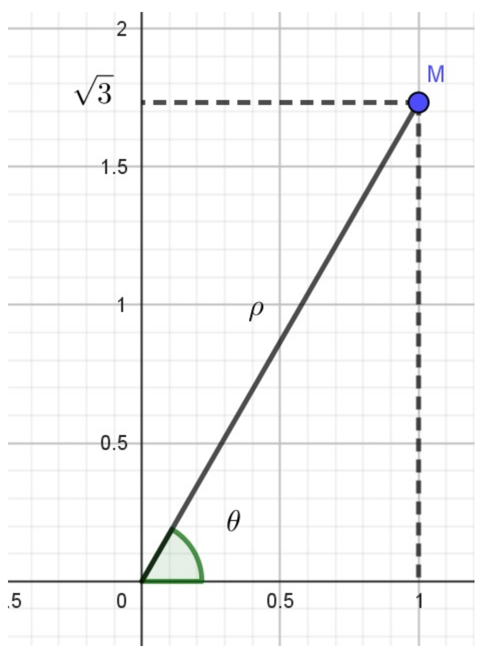
$$(a, b) + (a', b') = (a + b, a' + b')$$
$$\lambda(a, b) = (\lambda a, \lambda b)$$
$$(a, b) \times (a', b') = (aa' - bb', a'b + ab')$$

respect !

IV La forme trigonométrique

On a vu les problèmes rencontrés pour visualiser le produit de deux complexes. On va tenter de résoudre cela via la forme polaire d'un point du plan.

On rappelle les définitions des coordonnées polaires



Il existe donc une application des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\} & \longrightarrow &]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[\\ & (a,b) & \longmapsto & (\rho,\theta) \end{array}$$

avec les formules de passage de l'une à l'autre :

$$\left\{\begin{array}{l} a = \rho\cos\theta \\ b = \rho\sin\theta \end{array}\right. \qquad \text{et} \qquad \left\{\begin{array}{c} \rho = \sqrt{a^2+b^2} \\ \cos\theta = \dfrac{a}{\rho},\ \sin\theta = \dfrac{b}{\rho} \end{array}\right.$$

Exercice 3.
trouver les coordonnées polaires de $(1,1)$ et de $(1,-\sqrt{3})$.

Exercice 4.
Trouver la mesure principale de l'angle θ avec une seule formule utilisant a et b.

Définition 2.12 *La* ***forme trigonométrique*** *d'un complexe non nul $z = a+ib$ est* $\boxed{z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)}$ *où ρ est* ***le module*** *de z et θ est* ***un argument*** *de z. On note $\rho = |z|$ et $\theta \equiv \arg(z)\ (2\pi)$.*

Attention ! L'argument n'est défini qu'à 2π près.

Remarque: Le module a la même notation que la valeur absolue sur les réels. Ce qui est parfaitement normal dans la mesure où ils coïncident sur $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Exercice 5.
Ecrire sous forme trigonométrique les complexes suivants : $-2\sqrt{3}+2i$ et $3-4i$.
Les placer sur un plan complexe.

Remarque: Si z est l'affixe du point M, alors le module de z est la norme de $\overrightarrow{OM}$. On a donc

$$\boxed{|z_M = ||\overrightarrow{OM}||}\ .$$

L'unicité de la forme algébrique donne l'unicité de la forme trigonométrique :

Proposition 2.13 *Si $z = z'$ non nul, alors $\arg(z) \equiv \arg(z') \quad (2\pi)$.*

Corollaire 2.14 $|z| = 0$ *si et seulement si $z = 0$.*

Proposition 2.15 *Soit $(z,z') \in \mathbb{C}^2$ non nuls, on a*

$$\boxed{|zz'| = |z| \times |z'|} \qquad \boxed{\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') \quad (2\pi)}$$

Exercice 6.

Calculer le module et l'argument de $z = 3\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{i\sqrt{2}}{2}\right) \times 2\left(\dfrac{-1}{2} + \dfrac{i\sqrt{3}}{2}\right)$.

Corollaire 2.16 *Soit $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$\boxed{|z^n| = |z|^n} \qquad \boxed{\arg(z^n) \equiv n\arg(z) \quad (2\pi)}$$

Proposition 2.17 *Inégalité triangulaire Soit* $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, *on a*

$$\boxed{|z + z'| \leq |z| + |z'|}$$

Démonstration: Voir juste après le lemme de Cauchy-Schwartz.

Remarques:

- Les complexes de module 1 sont de la forme $\cos\theta + i\sin\theta$. Ils jouent un rôle très important. Ce sont les points du cercle trigonométrique.
- Les racines de $z^n = 1$ en font partie.
- Les propriétés de l'argument font penser à celles du ln.... Tiens tiens.

Exercice 7. *Les notations*

Déterminer les notations qui n'ont pas de sens :

1) $|AB|$
2) $\overrightarrow{AB}$
3) $|\overrightarrow{AB}|$
4) $\text{Aff}(AB)$
5) $\text{Aff}(A)$
6) $||\overrightarrow{AB}||$
7) $\arg(AB)$
8) $||AB||$
9) $\arg(A)$
10) $\arg(1)$