

Complexes II

Leçon 4

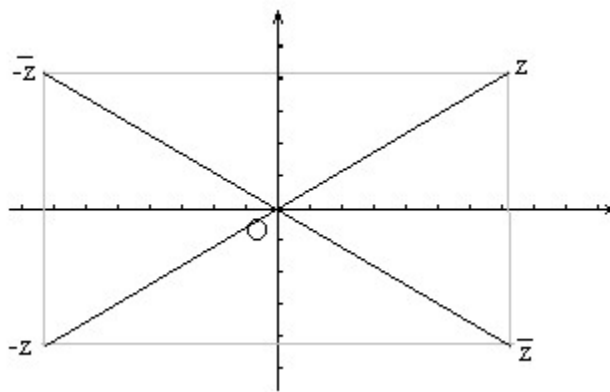
Math Xpertes- Lycée Gustave Eiffel - Bordeaux
Thierry Sageaux.

"J'adore les plaisirs tout simples. Ils constituent le dernier refuge des êtres complexes." Oscar Wilde (1854-1900).

I Le conjugué complexe

Définition 4.1 On appelle *conjugué complexe* du nombre complexe $z = a + ib$ le nombre complexe noté $\bar{z} = a - ib$.

Etymologie : Conjugué vient du latin *conjugare* qui veut dire marier, unir.
Ce qui donne le dessin-plus-qu'utile :



Remarque: Deux points d'affixes conjuguées sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

Proposition 4.2 Soient z et z' deux complexes et n un entier naturel, on a :

- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$
- $\overline{-z} = -\bar{z}$
- $\overline{zz'} = \bar{z} \times \bar{z}'$
- $\overline{z^n} = \bar{z}^n$
- $\overline{(\bar{z})} = z$
- $|\bar{z}| = |z|$
- $\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z) \pmod{2\pi}$
- $|z|^2 = z\bar{z}$
- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$
- $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z = -\bar{z}$

Démonstration:

Exercice 1. 🎵

□

On remarque que l'antépénultième fournit l'égalité que l'on avait déjà remarquée :

$$a^2 + b^2 = (a + ib)(a - ib)$$

Proposition 4.3 *Les racines d'un polynôme à coefficients réels de degré 2 et de discriminant strictement négatif sont complexes conjugués.*

Théorème 4.4 (Théorème de d'Alembert-gauss) *Tout polynôme de degré supérieur ou égal à 1 à coefficients complexes possède une racine complexe.*

Autrement dit, $\mathbb{C}$ est algébriquement clos.

Des démonstrations multiples, toutes hors programme.

Celle de d'Alembert (1717-1783) est incomplète (complétée par Argand). Gauss en donne trois complètement différentes en 1799, 1816 et 1849.

Ainsi,

Un polynôme à coefficients complexes de degré n a exactement n racines complexes comptées avec multiplicité.

II L'inverse d'un complexe

Si $z = a + ib$, alors quel sens peut-on bien donner à $\frac{1}{z}$?

Une idée assez naturelle est d'utiliser ce que l'on sait déjà faire : l'expression conjuguée

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{(a + ib)(a - ib)} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

ce qui est très cohérent puisque $|z|^2 = z\bar{z}$.

Définition 4.5 *Si $z = a + ib$ est un complexe non nul, on pose $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.*

On en profite pour définir le quotient : $\frac{z'}{z} = z' \times \frac{1}{z}$.

Exercice 2. 
Simplifier $\frac{1+i}{1-i}$.

Proposition 4.6

$$Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$$

$$Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

Démonstration:

Exercice 3. 

□

Proposition 4.7 Si $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ avec $z \neq 0$, alors on a

- $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$ et $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\bar{z}'}{\bar{z}}$
- $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ et $\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z) \pmod{2\pi}$
- $\left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}$ et $\arg\left(\frac{z'}{z}\right) \equiv \arg(z') - \arg(z) \pmod{2\pi}$ SI $z' \neq 0$

Démonstration: Utiliser $\frac{1}{z} \times z' = \frac{z'}{z}$.

□

Exercice 4. ♪

Montrer que si $|z| = 1$, alors $\frac{1}{z} = \bar{z}$.

Exercice 5. ♪

Montrer que si $|z'| = |z|$ et si $z \neq z'$, alors $\frac{z+z'}{z-z'} \in i\mathbb{R}$.

Blague : Deux complexes se présentent à l'entrée d'une boîte de nuit. Le videur leur dit : "Désolé, ici on n'accepte que les conjugués." L'un dit à l'autre : "Vient on se barre."

III La notation exponentielle

On peut définir

$$\begin{aligned} f:]-\pi, \pi] &\longrightarrow \mathbb{U} \\ \theta &\longmapsto \cos \theta + i \sin \theta \end{aligned}$$

On a alors $f(\theta + \theta') = f(\theta) \times f(\theta')$. Les solutions de cette équation fonctionnelle sont les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ avec $a = f'(0)$. En prolongeant la dérivation aux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, on trouve $f'(\theta) = -\sin \theta + i \cos \theta = if(\theta)$, d'où $f(\theta) = e^{i\theta}$.

D'où la notation,

$$\rho(\cos \theta + i \sin \theta) = \rho e^{i\theta}$$

On parle de la **forme exponentielle** d'un complexe.

Remarque: Même si on comprend mieux le lien (fonctionnel) entre les fonctions $\arg$ et $\ln$, il est exclu d'écrire le logarithme d'un complexe. La détermination du logarithme est quelque chose de très compliquée.

Exercice 6. ♪

Placer sur le plan d'Argand-Cauchy les points d'affixes $e^{i\pi}$, $e^{\frac{2i\pi}{3}}$, $\frac{1}{2}e^{\frac{-i\pi}{6}}$, $2e^{\frac{i\pi}{4}}$ et $e^{2i\pi}$.

Proposition 4.8 • $|e^{i\theta}| = 1$

- $\arg(e^{i\theta}) \equiv \theta \pmod{2\pi}$
- $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \Leftrightarrow \theta \equiv \theta' \pmod{2\pi}$
- $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$
- $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$
- $\frac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}} = e^{i(\theta-\theta')}$

Exercice 7. ♪

Donner la forme exponentielle de $z_1 = \frac{(1+i)^4}{(\sqrt{3}-i)^3}$,

Exercice 8. ♪

Calculez la forme exponentielle de $z_2 = \frac{(1+i\sqrt{3})^2}{(-1+i)^3}$.

En déduire $\sin$ et $\cos$ de $\frac{5\pi}{12}$.

Exercice 9. ♪

Calculer $(1+i)^{14}$.

Exercice 10. ♪

Pour quelle valeur de n a-t-on $(3-i\sqrt{3})^n \in \mathbb{N}$?

Exercice 11. ♪

Soit f une fonction du cercle unité dans $\mathbb{R}$, continue.
Montrer qu'il existe deux points diamétralement opposés ayant la même image par f .

La plus belle formule des mathématiques (dixit Euler) :

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}.$$

Lemme 4.9 (*Inégalité de Cauchy-Schwartz*) Si $z = \rho e^{i\theta}$ et $z' = \rho' e^{i\theta'}$, alors

$$\boxed{\operatorname{Re}(z\overline{z'}) \leq \rho\rho'}.$$

Démonstration:

$$\begin{aligned} |\operatorname{Re}(z\overline{z'})| &= |\operatorname{Re}(\rho\rho' e^{i\theta} e^{-i\theta'})| \\ &= \rho\rho' |\cos(\theta - \theta')| \\ &\leq \rho\rho' \end{aligned}$$

En particulier, $\operatorname{Re}(z\overline{z'}) \leq \rho\rho'$.

□

Remarque: En fait $(z, z') \mapsto \operatorname{Re}(z\overline{z'})$ est un produit scalaire sur $\mathbb{C}$.

Démonstration de l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} |z + z'|^2 &= (z + z')\overline{(z + z')} \\ &= z\overline{z} + z\overline{z'} + \overline{z}z' + z'\overline{z} \\ &= \rho^2 + 2\operatorname{Re}(z\overline{z'}) + \rho'^2 \\ &\leq \rho^2 + 2\rho\rho' + \rho'^2 \\ &\leq (\rho + \rho')^2 \\ &\leq (|z| + |z'|)^2 \end{aligned}$$

et on finit par la croissance de la fonction carrée.

□

Exercice 12. ♪

Simplifier $(\cos \theta + i \sin \theta)^2$ puis $(\cos \theta + i \sin \theta)^3$

Proposition 4.10 (*Formules de Moivre*) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

D'où $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$ et $(\cos \theta - i \sin \theta)^n = \cos n\theta - i \sin n\theta$.

Démonstration:

Exercice 13. ♪

□

Exercice 14. ♪ Cherchez l'erreur.

On a $e^{2i\pi} = 1$, mais alors $1 = (e^{2i\pi})^{\frac{1}{4}} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i \dots$

Exercice 15. ♪

Déterminer les solutions de $z^3 = 1$ via deux méthodes.

Proposition 4.11 (*Formules d'Euler*)

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Remarque: On peut rapprocher ces formules du ch et sh, mais l'analogie s'arrête à l'écriture.

Exercice 16. ♪

Vérifier que $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ est toujours d'actualité.

Exercice 17. ♪

- 1) Linéariser $\cos^4 \theta$.
- 2) En déduire une primitive.

Exercice 18. ♪

Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $e^{2i\theta} = \frac{1 + i\alpha}{1 - i\alpha}$.

Exercice 19. ♪ Un énorme classique.

Calculer $S = \sum_{k=0}^n \cos(k\theta)$ et $S' = \sum_{k=0}^n \sin(k\theta)$.

Exercice 20. ♪

Calculer $\sum_{k=0}^n k \sin k\theta$.

Exercice 21. ♪ Noyau de Dirichlet et noyau de Fejér.

- 1) Calculer $D_n(\theta) = \sum_{k=-n}^n e^{ik\theta}$.
- 2) Calculer $F_n(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k(\theta)$.

