# Matrices

Leçon 5
Math Xpertes- Lycée Gustave Eiffel - Bordeaux
Thierry Sageaux.

*"Le possible est une matrice formidable." Victor Hugo (1802-1885).*

## I Introduction

**Définition 5.1** *Une* ***matrice carrée d'ordre*** $n$ *est la donnée d'un tableau à* $n$ *lignes et* $n$ *colonnes*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

*On la note parfois* $A = (a_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]}$ *ou plus simplement* $A = (a_{ij})$.

*On note* $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *l'ensemble des matrices carrées d'ordre* $n$ *à coefficients dans* $\mathbb{K}$. *(N.B. Pour nous* $\mathbb{K}$ *vaut* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*).*

*Exemple:* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 3 & -2 \\ \pi & 1 & \sqrt{17} \end{pmatrix}$,

- la **matrice nulle** d'ordre 2 : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,
- la **matrice identité** d'ordre 4 :

$$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- les **matrices diagonales** :

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- les **matrices élémentaires** :

$$E_{i,j}(\lambda) = (e_{k,l}) \text{ avec } e_{k,l} = 0 \text{ pour tout } (k,l), \text{ sauf } e_{i,j} = \lambda$$

Ainsi, $A = \sum_{i,j} E_{i,j}(a_{i,j})$.

**Définition 5.2** *Plus généralement, on peut définir une matrice* $n \times m$ *par la donnée d'un tableau de* $n$ *lignes et de* $m$ *colonnes.*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

*On note* $\mathscr{M}_{nm}(\mathbb{K})$ *l'ensemble des matrices carrées d'ordre* $n \times m$ *à coefficients dans* $\mathbb{K}$.

*Exemple:* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & e & 0 \\ \sqrt{3} & \pi & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 252 & -8 \end{pmatrix}$

*Remarque:* Un cas particulier est celui des vecteurs

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

qui sont des **matrices colonnes**. (ici, une $4 \times 1$.

Nous allons voir plus loin pourquoi il est important que les vecteurs soient exprimés en colonne ! !

Maintenant que nous avons de nouveaux objets, on voudrait jouer avec. Pour cela, il faut suivre la même évolution que les premiers hommes avec les nombres. Ils ont commencé par créer **l'addition** :

**Définition 5.3** *Si $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont deux matrices de même taille, alors on définit la matrice somme*

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$

*de la façon la plus naturelle qui soit.*

*Exemple:* $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & \dots & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ \dots & 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ 1 & -2 & \dots \end{pmatrix}$

L'étape suivante est de définir un produit. On commence léger avec le **produit par un réel**. On veut quelque chose de compatible avec $A + A = 2A$...

Par le processus classique de densification et de continuité, on pose :

**Définition 5.4** *Soient $A = (a_{ij})$ une matrice et $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit la matrice*

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})$$

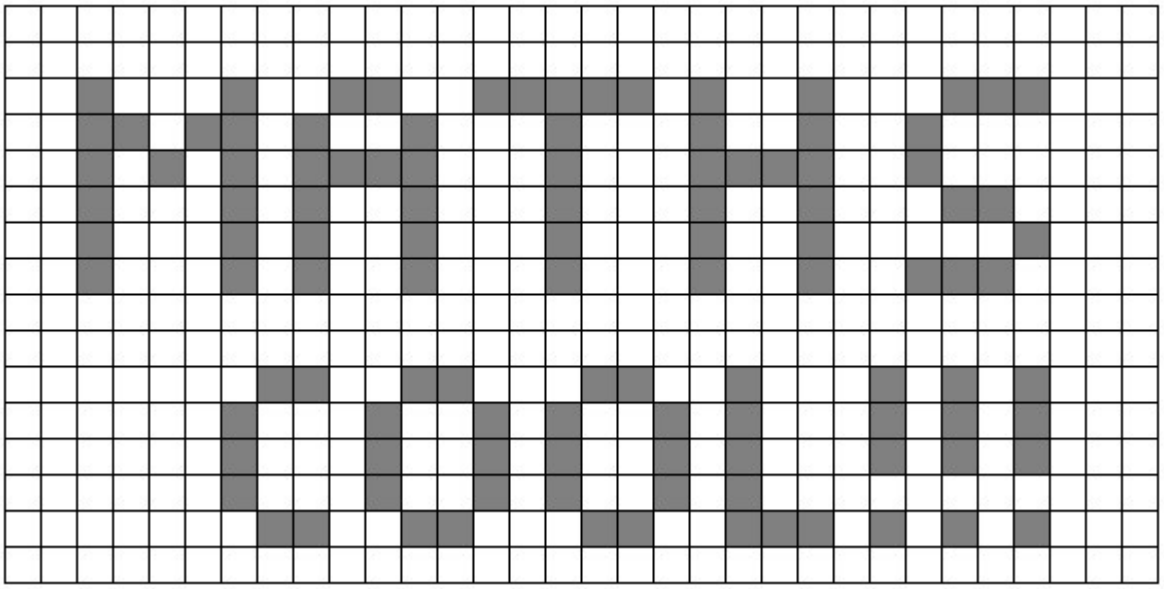
*de façon naturelle là encore.*

*Exemple:* $-3 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$

# II Une première application

Imaginez que l'on veut numériser une image...

... celle-ci par exemple !

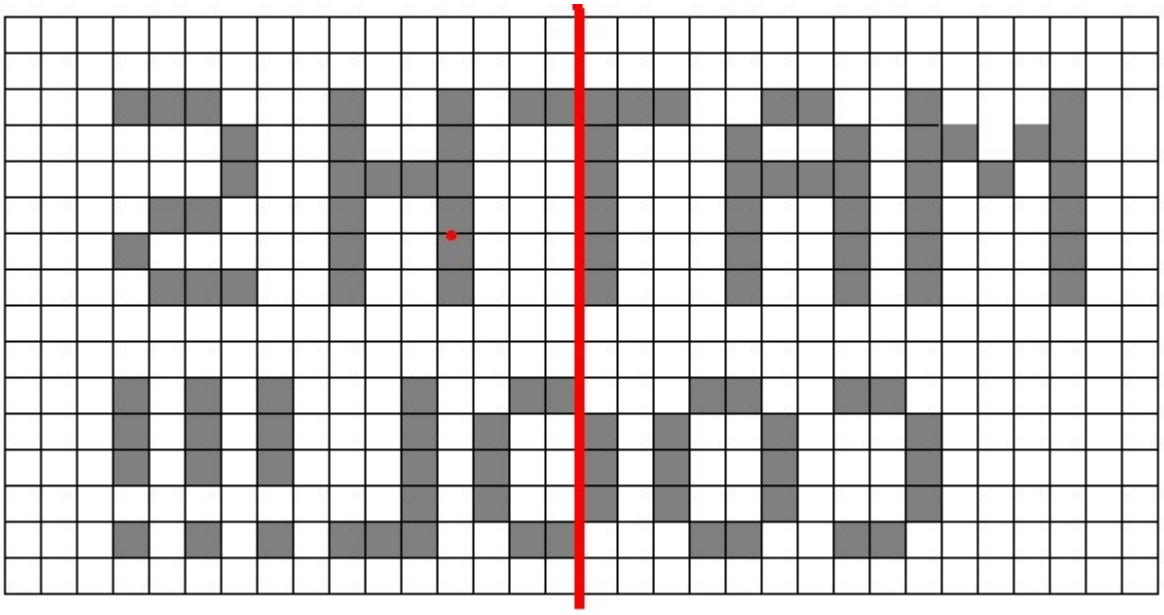


Il suffit de créer une matrice $16 \times 32$ remplie de 0 pour les cases blanches et de 1 pour les cases noires. C'est un peu archaïque et on fait beaucoup mieux en traitement de l'image de nos jours (voir matrices creuses et matrices de Cholesky)

Si je veux une images en couleur, il suffit d'augmenter les valeurs possibles des coefficients.

Vu sous cet angle, la somme de deux matrices correspond à la superposition de deux images et la multiplication par un scalaire à un changement de couleurs (ou des contrastes).

En fait, le publicité abusive est sanctionnée par l'ARCOM et plutôt que de perdre un temps fou à flouter les zones de publicités qui sont un peu partout et inévitables quand on fait un reportage, les journalistes préfèrent bien souvent inverser tout simplement l'image. Le nom de la marque n'est plus "lisible" et ils ne peuvent pas être accusés injustement.



**Exercice 1.** ♩

Quelle est la transformation opérée sur cette matrice et qui correspond à une symétrie axiale ?

Cette transformation n'a pas d'application mathématique, nous ne développerons pas plus avant.
En revanche, un cas particulier plus intéressant est

**Définition 5.5** *Si $A = (a_{ij})$ est une matrice carrée, alors on définit la* ***matrice transposée*** *de $A$ par*

$$^tA = (a_{ji})$$

*en utilisant la symétrie axiale par rapport à la diagonale.*

*Exemple:* Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 3 & -2 \\ \pi & 1 & \sqrt{17} \end{pmatrix}$, alors $^tA = ...$

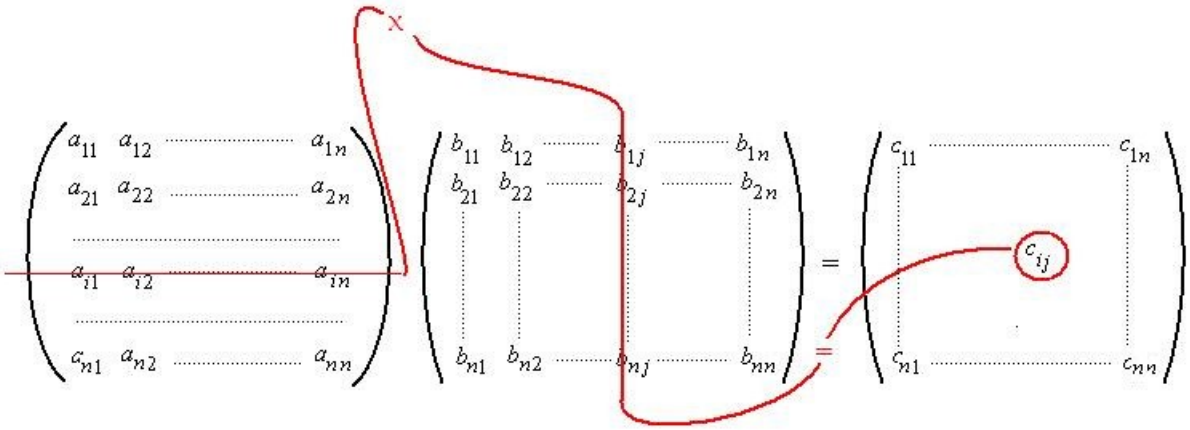
**Définition 5.6** *Les matrices telles que $^tA = A$ sont appelées* ***symétriques****.*
*Celles pour lesquelles $^tA = -A$ sont dites* ***antisymétriques****.*

**Exercice 2.** ♪
Déterminer les matrices qui sont à la fois symétriques et antisymétriques.

**Exercice 3.** ♩
Montrer que toute matrice $A$ peut s'exprimer comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

# III Le produit matriciel

Pour effectuer le produit matriciel, on utilise le **ligne-colonne**




**Exercice 4.** ♪
On pose $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Calculer $A^2$, $AI$, $BI$, $AB$, $BC$, $CB$ et $ABC$.

**Exercice 5.** ♪
On pose la matrice de $\mathscr{M}_n\mathbb{R}$

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer $N^2$, $N^3$ et plus généralement $N^k$ avec $k \in \mathbb{N}\{0\}$.

**Exercice 6.** ♪

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer $A^2 + 2AB + B^2$ et $(A+B)^2$. Oups.

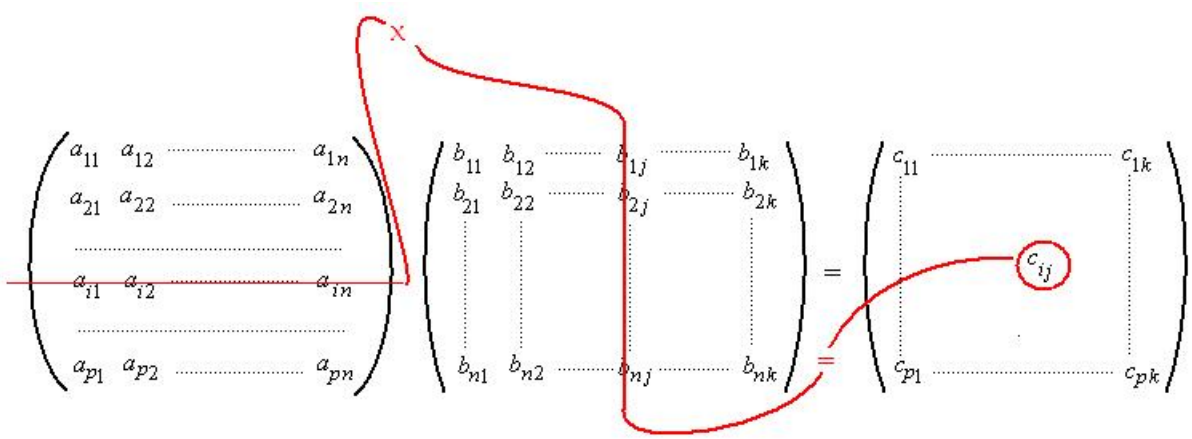
$$\boxed{\text{Le produit matriciel n'est pas COMMUTATIF!!}}$$

**Exercice 7.** ♩

Trouver deux matrices $A$ et $B$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $AB = (0)$ et $BA \neq (0)$

Si nous prenons une matrice de $A \in \mathcal{M}_{p\times n}$ et $B \in \mathcal{M}_{n\times k}$, nous avons autant de colonnes dans la première que de lignes dans la seconde.

On peut alors appliquer l'algorithme ligne-colonne une matrice $C \in \mathcal{M}_{p\times k}$




Si l'on veut mettre cela en formule, c'est beaucoup moins sympathique : $\boxed{c_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lj}}$ .

*Exemple:* On fait le produit de deux matrices (vérifiez que je ne me suis pas trompé...)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}}_{\in \mathcal{M}_{2\times 3}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{\in \mathcal{M}_{3\times 4}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 11 & -2 & 2 \\ 13 & 0 & 12 & 5 \end{pmatrix}}_{\in \mathcal{M}_{2\times 4}}$$

Ah ben si. Y'a une erreur. C'est ballot. Trouvez-là.

**Exercice 8.** ♩

Si $M$ et $N$ sont deux matrices de formats respectifs $(m,n)$ et $(n,m)$ telles que $MN = I$, montrer que la matrice $P = NM$ est **idempotente** (i.e. $P^2 = P$). En déduire que $P$ est diviseur de zéro à gauche et à droite.

On peut facilement étendre le produit matriciel aux matrices qui ne sont pas carrées. Il suffit que le nombre de colonnes de la première soit égal au nombre de lignes de la seconde.

**Exercice 9.** ♩

Effectuez les produits de tous les couples de matrices obtenus avec les quatre matrices suivantes, quand c'est possible.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Autre méthode de calcul.

# IV Systèmes linéaires

## IV.1 Systèmes $2 \times 2$.

On veut résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 10x + 4y = 3 \\ 6x + 2y = -5 \end{cases}$$

Par substitution ou combinaisons, on trouve la seule solution $S = \{(\frac{-13}{2}, 17)\}$.

En termes matriciels, le problème revient à résoudre

$$AX = B$$

avec $A = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Chose que l'on pourrait facilement résoudre si l'on savait calculer l'inverse de $A$. En effet,on aurait alors

$$AX = B \quad \Leftrightarrow \quad A^{-1}AX = A^{-1}B \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{X = A^{-1}B}$$

Mais on est en droit de se demander si cela est cohérent avec ce que l'on savait faire sur les systèmes linéaires...

On se souvient qu'un tel système linéaire représentait en fait l'intersection de deux droites du plan. Ainsi, il y avait une solution unique si et seulement si les deux droites était sécantes, i.e. si les vecteurs directeurs des deux droites $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires ; autrement dit, si et seulement si le déterminant de ces deux vecteurs est non nul. Ce qui donne exactement le même résultat que $\det(A) \neq 0$.

Déclarer l'inversibilité de la matrice revient donc exactement à dire que les droites sont sécantes et donc qu'il n'y a qu'une seule solution au problème.

Mais quand est-il si le déterminant est nul ? Dans ce cas, les droites sont parallèles. Si elles sont confondues, il y a une infinité de solution (tout point de la droite). Si elles sont disjointes, pas de solution.

### IV.2 Systèmes $3 \times 3$

Essayons dans un premier temps de trouver les solutions de

$$(S_2) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x + y = 4 \\ x - y - z = -4 \end{cases}$$

On trouve par les méthodes classiques : $S = \{(1, 2, 3)\}$.

### IV.3 Lien des systèmes linéaires avec les matrices

On peut voir un système linéaire du point de vue matriciel. En effet, dans le système précédent, si l'on pose

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

on peut alors écrire que

$$(S_2) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Soit en posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$,

$$MX = B$$

Il nous suffirait de savoir "diviser" par $M$. Mais la division matricielle n'existe pas.
Problème :

$$\boxed{\text{La division matricielle n'existe pas !!}}$$

Quand on y réfléchi, si on écrit $2x = 4$, ce n'est pas vraiment de la division par 2 dont on a besoin pour résoudre cette équation, il nous suffirait d'avoir un "inverse de 2". En effet, si on possède un inverse de 2, appelons-le $\alpha$, un nombre donc tel que $\alpha \times 2 = 1$, on pourrait écrire $\underbrace{\alpha \times 2}_{=1} x = \alpha \times 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = \alpha \times 4$.

On va procéder de la même façon avec nos matrices. On cherche une matrice $M'$ telle que $M'M = I$.

## V Inversion d'une matrice

### V.1 Définition

**Définition 5.7** *Soit $A = (a_{ij})$ une <u>matrice carrée d'ordre $n$</u>. S'il existe une matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n = BA$.*
*On dit alors que $A$ est **inversible** et que $B$ est son **inverse**.*
*On note $A^{-1} = B$.*

**<u>Attention !</u>** L'inverse n'existe pas toujours, et, quand il existe, il n'est pas clair qu'il soit unique, ni même bilatère. Admis au niveau terminale (il faudrait plus de connaissance sur le déterminant).

**Exercice 10.** ♩

Déterminer les inverses de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et de $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

## V.2 Formule pour les matrices $2 \times 2$

**Définition 5.8** *On appelle* ***déterminant*** *d'une matrice de* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ *le nombre*

$$\boxed{\det A = ad - bc}$$

**Proposition 5.9** *Soit* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *un matrice carrée* ***d'ordre*** 2. *Si* $\det(A) = ad - bc \neq 0$, *alors* $A$ *est inversible et*

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$$

## V.3 Inversion archaïque d'une matrice

Reprenons la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Si l'on y réfléchit un peu, déterminer l'inverse de $M$ revient à résoudre un système. En effet,

$$(S_2) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - 2y + z = X \\ 2x + y = Y \\ x - y - z = Z \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Y \end{pmatrix}$$

Si l'on cherche l'inverse $M^{-1}$ de $M$, cela revient à écrire :

$$(S_2) \quad \Leftrightarrow \quad M^{-1}M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

Il suffit donc de retourner le système $(S_2) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - 2y + z = X \\ 2x + y = Y \\ x - y - z = Z \end{cases}$.

C'est parti :

$$\begin{cases} x-2y+z=X \\ 2x+y=Y \\ x-y-z=Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+z=X \\ 5y-2z=-2X+Y \\ y-2z=-X+Z \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2-2L_1, \quad L_3 \leftarrow L_3-L_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+z=X \\ y-2z=-X+Z \\ 5y-2z=-2X+Y \end{cases} \quad L_2 \leftrightarrow L_3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+z=X \\ y-2z=-X+Z \\ 8z=3X+Y-5Z \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3-5L_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+z=X \\ 4y=-X+Y-Z \\ 8z=3X+Y-5Z \end{cases} \quad L_2 \leftarrow 4L_2+L_3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x-16y=5X-Y+5Z \\ 4y=-X+Y-Z \\ 8z=3X+Y-5Z \end{cases} \quad L_1 \leftarrow 8L_1-L_3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x=X+3Y+Z \\ 4y=-X+Y-Z \\ 8z=3X+Y-5Z \end{cases} \quad L_1 \leftarrow L_1+4L_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

On a donc trouvé

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

On vérifie aisément qu'il s'agit bien de l'inverse de $M$ en effectuant les calculs $MM^{-1} = M^{-1}M = I$.

## V.4 La méthode de Gauss-Jordan

Si l'on reprend la résolution précédente on remarque que

$$\begin{cases} x-2y+z=X \\ 2x+y=Y \\ x-y-z=Z \end{cases} \Leftrightarrow M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = I\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

en s'affranchissant des $x, y, z, X, Y, Z$, on effectue les mêmes transformations que précédemment, sur les deux matrices en simultané :

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 5 & -2\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1, \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \qquad \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 5 & -2\end{pmatrix} \qquad L_2 \leftrightarrow L_3 \qquad \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 8\end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2 \qquad \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 3 & 1 & -5\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}8 & -16 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 8\end{pmatrix} \qquad L_2 \leftarrow 4L_2 + L_3, L_1 \leftarrow 8L_1 - L_3 \qquad \begin{pmatrix}5 & -1 & 5\\ -1 & 1 & -1\\ 3 & 1 & -5\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}8 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 8\end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow L_1 + 4L_2 \qquad \begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ 3 & 1 & -5\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow \frac{1}{8}L_1, \quad L_2 \leftarrow \frac{1}{4}L_2, \quad L_3 \leftarrow \frac{1}{8}L_3 \qquad \frac{1}{8}\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ -2 & 2 & -2\\ 3 & 1 & -5\end{pmatrix}$$

## V.5 Le cas général

L'idée est assez simple et basée sur l'intervention des matrices

• **Les matrices de transvection :**

$$B_{i,j}(\lambda) = I + \lambda E_{i,j}$$

où $I$ est la matrice identité et $E_{i,j}$ est la matrice nulle, sauf pour le coefficient de la ligne $i$ et de la colonne $j$ qui vaut $\lambda$. On a donc une matrice avec des 1 sur la diagonale et des 0 partout ailleurs, sauf un $\lambda$ qui traîne !

$$B_{i,j}(\lambda) = \begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \lambda & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Voyons l'effet de ces matrices par produit : Si $M = \begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$ et $B_{2,3}(\lambda) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \lambda\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

On calcule

$$B_{2,3}(\lambda)M = \begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 2+\lambda & 1-\lambda & -\lambda\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad MB_{2,3}(\lambda) = \begin{pmatrix}1 & -2 & 1-2\lambda\\ 2 & 1 & \lambda\\ 1 & -1 & -1-\lambda\end{pmatrix}$$

Autrement dit, multiplier à gauche par ces matrices revient à agir sur les lignes (dans l'exemple ci-dessus, on a fait $L_2 \longleftarrow L_2 + \lambda L_3$) et multiplier à droite revient à agir sur les colonnes (dans l'exemple ci-dessus, on a fait $C_3 \longleftarrow C_3 + \lambda C_2$). Il s'agit donc d'une façon de formaliser les opérations sur les lignes et les colonnes

• **Les matrices de dilatation :**

$$D_i(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice identité en remplaçant le "1" de la ligne $i$ par $\lambda$.

On regarde les effets de la multiplication par les matrices de dilatation :

$$D_3(\lambda)M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ \lambda & -\lambda & -\lambda \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad MD_3(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & \lambda \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

Autrement dit, multiplier à gauche par ces matrices revient à agir sur les lignes (dans l'exemple ci-dessus, on a fait $L_3 \longleftarrow \lambda L_3$) et multiplier à droite revient à agir sur les colonnes (dans l'exemple ci-dessus, on a fait $C_3 \longleftarrow \lambda C_3$).

• **Les matrices de permutations :**

$$Q_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & & \vdots & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \ddots & & \vdots & 1 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & \ddots & \vdots & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \ddots \end{pmatrix}$$

la matrice identité à laquelle on a retiré les "1" des lignes $i$ et $j$ et on ajoute des "1" en $a_{ij}$ et en $a_{ji}$.

On regarde les effets de la multiplication par les matrices de permutation :

$$Q_{23}M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad MQ_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Autrement dit, multiplier à gauche par ces matrices revient à agir sur les lignes en intervertissant les lignes $i$ et $j$. Et multiplier à droite revient à agir sur les colonnes en intervertissant les colonnes $i$ et $j$.

Reprenons notre exemple et l'inversion de notre matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Les transformations effectuées ont été (dans l'ordre) :

$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, $L_2 \leftrightarrow L_3$, $L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2$, $L_2 \leftarrow 4L_2 - L_3$, $L_1 \leftarrow 8L_1 + L_3$, $L_1 \leftarrow L_1 + 4L_2$

Il faut donc multiplier par les matrices :

$$D_1(\tfrac{1}{8})D_2(\tfrac{1}{4})D_3(\tfrac{1}{8})B_{12}(4)B_{13}(1)D_1(8)B_{23}(-1)D_2(4)B_{32}(-5)Q_{23}B_{31}(-1)B_{21}(-2)$$

Ainsi, on a

$$\underbrace{D_1(\frac{1}{8})D_2(\frac{1}{4})D_3(\frac{1}{8})B_{12}(4)B_{13}(1)D_1(8)B_{23}(-1)D_2(4)B_{32}(-5)Q_{23}B_{31}(-1)B_{21}(-2)}_{=M^{-1}}M = I$$

### V.6 Le cas des polynômes annulateurs

**Exercice 11.** ♩

Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

**1)** Montrer que $A^2 - 7A - 10I = (0)$.

**2)** En déduire que $A$ est inversible et l'expression de son inverse.

La méthode est, de loin, la plus rapide en dimension supérieure quand le polynôme est donné. Plus difficile sinon :

**Exercice 12.** ♩

Essayer de trouver un polynôme annulateur pour la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

**Exercice 13.** ♩

Essayer de faire de même avec la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

## VI Puissance d'une matrice

### VI.1 Si la matrice est diagonale

Quand la matrice est diagonale, il n'est pas très difficile de voir qu'il suffit d'élever chaque coefficient diagonal à la puissance en question :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}^p = \begin{pmatrix} a_{11}^p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn}^p \end{pmatrix}$$

## VI.2 Si elle est triangulaire

Commençons par une matrice simple de prime abord :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Essayons de calculer $M^n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

**Exercice 14.**

**1)** Calculer $M^2$, $M^3$, $M^4$ jusqu'à pouvoir conjecturer la forme de $M^n$.

**2)** Le démontrer par récurrence.

Autre méthode : On pose $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On a ainsi $M = I + J$. On peut alors calculer

$$M^n = (I+J)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I^{n-k} J^k$$

Car $IJ = JI$ (sinon, la non commutativité du produit matriciel fait capoter le binôme de Newton).

Mais comme $J^3 = 0$, on trouve que $M^n = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} J^k = I + nJ + \dfrac{n(n-1)}{2} J^2$.

Donc

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \dfrac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## VI.3 Quid du cas général ?

Peu d'espoir par les techniques précédentes. A ce stade, on a besoin de (beaucoup) plus de théorie ! Sans aller trop loin, on imagine que l'on peut trouver une matrice inversible $P$ telle que

$$M = PDP^{-1}$$

avec $D$ une matrice diagonale.

**Attention !** Ce n'est pas toujours possible ! !

Dans ce cas,

$$M^n = PD\underbrace{P^{-1}P}_{=I}D\underbrace{P^{-1}P}_{=I}DP^{-1}\dots PD\underbrace{P^{-1}P}_{=I}DP^{-1} = \boxed{PD^nP^{-1}}$$

*Exemple:* Essayons avec $M = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

On trouve que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $M^n = I$ si $n \equiv 0(2)$ et $M^n = M$ si $n \equiv 1(2)$.

# VII Lien avec les suites récurrentes

## VII.1 Les suites doubles

On cherche à déterminer une expression des suites $(u_n)$ et $(v_n)$ qui satisfont

$$(S) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} u_{n+1} = -3u_n + 4v_n \\ v_{n+1} = -2u_n + 3v_n \end{cases} \qquad \text{et } (u_0, v_0) = (1, 2).$$

On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ et on obtient

$$(S) \quad \Leftrightarrow \quad X_{n+1} = MX_n \qquad \text{avec } X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Par analogie avec les suites géométriques, on obtient facilement

$$X_n = M^n X_0.$$

On voit donc que l'élévation d'une matrice à une certaine puissance est très importante pour étudier la stabilité ou l'évolution d'un système dynamique.

**Exercice 15.** ♩

On pose $0 < p < q$ et $u_0 = a < b = v_0$. Faire une étude classique de

$$(S) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{q}{p+q}u_n + \dfrac{p}{p+q}v_n \\ v_{n+1} = \dfrac{p}{p+q}u_n + \dfrac{q}{p+q}v_n \end{cases}$$

Et si l'on utilise les matrices, on trouve $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} \frac{q-p}{p+q} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On peut même faire mieux avec .

## VII.2 Les suites récurrentes linéaires d'ordre 2

On considère la très classique **suite de Fibonacci** :

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34...$$

i.e. $F_0 = F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Une formule classique due à Binet est que

$$\boxed{F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]}.$$

On se propose de démontrer ici cette formule.

**Exercice 16.** ♩

**1)** On pose $X_n = \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix}$. Montrer que l'on peut trouver une matrice $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1} = MX_n$.

**2)** Déterminer un polynôme annulateur $Q$ de $M$ de degré 2.

**3)** Montrer que les racines de $Q$ sont $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $1 - \varphi$.

**4)** On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} \varphi & 1 \\ 1 & -\varphi \end{pmatrix}$. Calculer $P^2$ et en déduire $P^{-1}$.

**5)** Calculer $D = P^{-1}MP$.

**6)** En déduire $M^n$ pour $n \in \mathbb{N}$ puis l'expression de $F_n$ en fonction de $F_n$ en fonction de $n$. Montrer que l'on retrouve bien la formule de Binet annoncée.

**7)** A partir de la formule de Binet, montrez que $F_n$ est bien un entier.