29/9/2022 (2h)

Devoir Surveillé $n°$1

TF 2022-2023 Lycée Gustave Eiffel

Les documents ne sont pas autorisés. Les doudoux (y compris portables et calculatrices) sont éteints, rangés dans les sacs, eux-mêmes déposés au fond de la salle ou au pied du tableau.

Exercice 1. *(4 pt)*

J'ai acheté une voiture électrique au prix de 50 000€. Elle perd 15% de sa valeur tous les ans.

1) Déterminer sa valeur au bout de deux ans.

2) Idem au bout de n années.

3) Quelle équation faut-il résoudre pour déterminer au bout de combien d'année elle vaudra moins de 1 000€ ?

4) Proposez un petit algorithme en Python permettant de déterminer cette valeur.

Exercice 2. *(8 pt)*

Partie A. Démonstration de cours

1) Rappeler la définition de (u_n) tend vers $+\infty$.

2) Démontrer le théorème d'unicité de la limite d'une suite.

Partie B.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x^2 + \sin(x).$$

La courbe $(\mathscr{C})$ représentative de la fonction f dans un repère orthogonal est donnée ci-après. Cette courbe sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

1) Montrer que $f(x) \geq x$ pour tout $x \geq 0$.
On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = \frac{1}{2}$, et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

2) Construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite (u_n) en laissant apparents les traits de construction (utiliser le graphique donné).

3) A partir de ce graphique, que peut-on conjecturer concernant le sens de variation de la suite (u_n) et son comportement lorsque n tend vers $+\infty$?

4) **a)** Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \geqslant \frac{1}{2}$.
b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
c) Montrer que la suite (u_n) n'est pas majorée.
d) En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 3. *(6 pt)*

Partie A. On définit :

— la suite (u_n) par : $u_0 = 13$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{5}u_n + \dfrac{4}{5}$.

— la suite (S_n) par : pour tout entier naturel n, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

1) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = 1 + \dfrac{12}{5^n}$.
En déduire la limite de la suite (u_n).

2) **a)** Déterminer le sens de variation de la suite (S_n).
b) Calculer S_n en fonction de n.

c) Déterminer la limite de la suite (S_n).

Partie B.

Etant donnée une suite (x_n), de nombres réels, définie pour tout entier naturel n, on considère la suite (S_n) définie par $S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$.

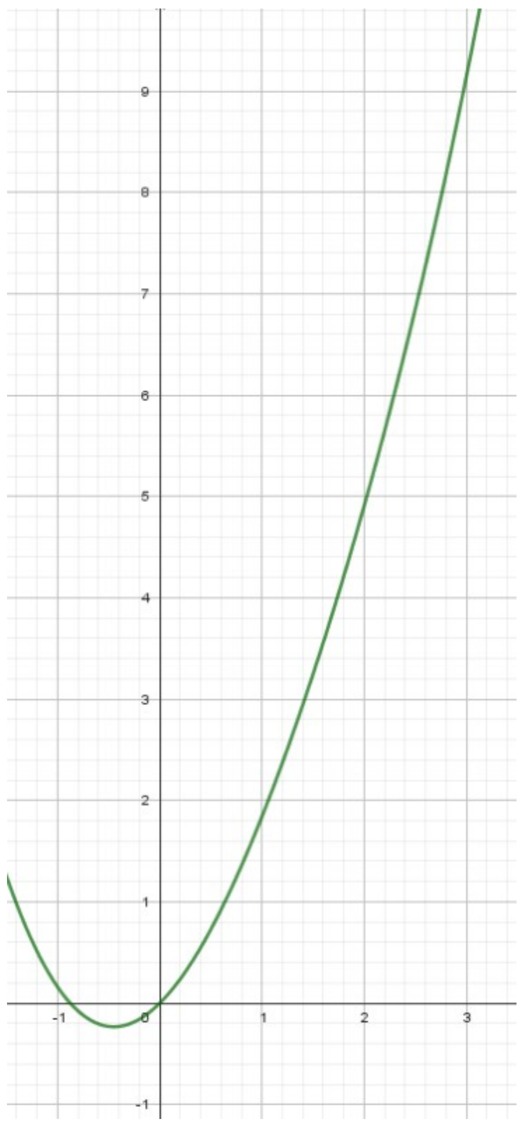
Indiquer pour chaque proposition suivante si elle est vraie ou fausse.
Justifier dans chaque cas.

Proposition 1 : si la suite (x_n) est convergente, alors la suite (S_n) l'est aussi.

Proposition 2 : les suites (x_n) et (S_n) ont le même sens de variation.

Exercice 4. *(2 pt)*

Calculer $S = 2 + 10 + 50 + 250 + ... + 19\ 531\ 250$.



Correction Devoir Surveillé 1

Exercice 1.

1) On pose (u_n) la suite définie par $u_0 = 50\ 000$. On a alors $u_1 = u_0 - 0,15u_0 = 0,85u_0 = 42\ 500$.
De même, $u_2 = 0,85u_1 = \boxed{36\ 125}$.

2) La valeur est une suite géométrique de raison $q = 0,85$ et de premier terme $u_0 = 50\ 000$.
Donc $u_n = u_0q^n = \boxed{50\ 000(0,85)^n}$

3) Il faudra résoudre $u_n < 1\ 000$.

4)

```
u = 50 000
n = 0
while  u >= 1 000 :
        u = u * 0.85
        n+ = 1
print(n)
```

Exercice 2.

Partie A.

1) Voir cours.

2) Voir cours.

Partie B.

1) Un classique : on transpose et on étudie la fonction $\varphi(x) = x^2 + \sin(x) - x$. On a $\varphi'(x) = 2x + \cos(x) - 1$ qui est bien positif (strictement) sur $[0, +\infty[$ (si on ne le voit pas, on peut toujours dériver un coup de plus et obtenir $\varphi''(x) = 2 - \sin(x)$). Donc φ est croissante sur $]0, +\infty[$ et comme $\varphi(0) = 0$, on a bien $f(x) \geq x$ pour tout $x \geq 0$.

4) a) Ici, le sujet du bac semble se perdre un peu. En effet, on peut démontrer facilement que (u_n) est croissante en utilisant la propriété précédemment démontrée puis utiliser que $u_0 = \frac{1}{2}$.

En effet, comme $f(x) \geq x$, on a bien en particulier que $f(u_n) \geq u_n \quad \Leftrightarrow \quad u_{n+1} \geq u_n$.

b) Vu à la question d'avant, ce qui est un peu bof pour un sujet du bac...

c) Voila une question délicate et intéressante. De manière générale, pour montrer qu'une suite n'est pas majorée, on la minore par une suite elle-même non majorée, divergente vers $+\infty$ par exemple. En éliminant les premiers termes de la suite, on peut montrer qu'à partir d'un certain rang, $u_n > n$.

Cependant, ici on peut plutôt procéder par l'absurde : si (u_n) était majorée, comme elle est croissante, elle serait convergente. Or la limite serait un réel obtenu comme intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite d'équation $y = x$. Et il n'y en a pas d'après la question B.1. Contradiction.

d) La suite (u_n) est croissante et non majorée. On démontre alors qu'elle diverge vers $+\infty$: On a pour tout M l'existence d'un n_0 tel que $u_{n_0} > M$. Or (u_n) est croissante, donc pour tout $n \geq n_0$, on a $u_n > M$, ce qui est la définition de la divergence vers $+\infty$.

Exercice 3.

Partie A.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose P_n : "$u_n = 1 + \dfrac{12}{5^n}$".

<u>Initialisation :</u> P_0 est vraie car $1 + \dfrac{12}{5^0} = 13 = u_0$.

Hérédité : On suppose P_n vraie pour n fixé.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} \\ &= \frac{1}{5}\left(1+\frac{12}{5^n}\right)+\frac{4}{5} \\ &= \frac{1}{5}+\frac{12}{5^{n+1}}+\frac{4}{5} \\ &= 1+\frac{12}{5^{n+1}} \end{aligned}$$

La propriété est donc héréditaire.

Conclusion : La propriété est vraie au rang 0, elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Comme $\left|\frac{1}{5}\right| < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{5^n} = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \boxed{1}$.

2) a) $S_{n+1} - S_n = u_{n+1}$ par télescopage. Et comme $u_n > 0$ pour tout n, on a (S_n) croissante.

b) On a

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n}\left(1+\frac{12}{5^n}\right) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} 1}_{=n+1} + 12 \underbrace{\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{5^n}}_{=\frac{1-(\frac{1}{5})^{n+1}}{1-\frac{1}{5}}} = \boxed{n+16-\frac{3}{5^n}}$$

c) Comme $\left|\frac{1}{5}\right| < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{5^n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (n+16) = \boxed{+\infty}$.

Partie B.

0) Proposition 1 : Faux. L'exemple étudié dans la première partie fournit un contre-exemple.
Idem pour la proposition 2.
A noter que la série harmonique $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ donne aussi un contre-exemple classique.

Exercice 4.

On remarque que $S = 2(1+5+5^2+\ldots 5^{10}) = 2\frac{1-5^{11}}{1-5} = \boxed{24\ 414\ 062}$.