Les documents ne sont pas autorisés. Les doudoux (y compris portables et calculatrices) sont éteints, rangés dans les sacs, eux-mêmes déposés au fond de la salle ou au pied du tableau.

Exercice 1. *(5 pt)*

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 5 \quad \text{et, pour tout entier } \; n \geqslant 1,\; u_n = \left(1+\frac{2}{n}\right)u_{n-1} + \frac{6}{n}.$$

1) a) Calculer u_1.

b) Les valeurs de $u_2,\; u_3,\; u_4,\; u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{11}$ sont respectivement égales à :
45, 77, 117, 165, 221, 285, 357, 437, 525, 621.
A partir de ces données conjecturer la nature de la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $d_n = u_{n+1} - u_n$.

2) On considère la suite arithmétique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison 8 et de premier terme $v_0 = 16$.
Déterminer la somme des n premiers termes de cette suite.

3) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a : $u_n = 4n^2 + 12n + 5$.

4) Valider la conjecture émise à la question **1. b.**.

Exercice 2. *(6 pt)*

On considère deux suites de nombres réels (d_n) et (a_n) définies par $d_0 = 300$, $a_0 = 450$ et, pour tout entier naturel $n \geqslant 0$

$$\left\{\begin{array}{lcl} d_{n+1} & = & \frac{1}{2}d_n + 100 \\ a_{n+1} & = & \frac{1}{2}d_n + \frac{1}{2}a_n + 70 \end{array}\right.$$

1) Calculer d_1 et a_1.

2) On souhaite écrire un algorithme qui permet d'afficher en sortie les valeurs de d_n et a_n pour une valeur entière de n saisie par l'utilisateur.

L'algorithme suivant est proposé :

```
D=300
A=450
n=int(input("Saisir la valeur n : "))
for k in range(1,n+1) :
   D=D/2+100
   A=A/2+D/2+70
print(D)
print(A)
```

a) Quels nombres obtient-on en sortie de l'algorithme pour $n = 1$?
Ces résultats sont-ils cohérents avec ceux obtenus à la question **1.** ?

b) Expliquer comment corriger cet algorithme pour qu'il affiche les résultats souhaités.

3) a) Pour tout entier naturel n, on pose $e_n = d_n - 200$.
Montrer que la suite (e_n) est géométrique.

b) En déduire l'expression de d_n en fonction de n.

c) La suite (d_n) est-elle convergente ? Justifier.

4) On admet que pour tout entier naturel n,

$$a_n = 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 110\left(\frac{1}{2}\right)^n + 340.$$

a) Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on a $2n^2 \geqslant (n+1)^2$.
b) Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 4, on a $2^n \geqslant n^2$.
c) En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 4, on a $0 \leqslant 100n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \leqslant \dfrac{100}{n}$.
d) Etudier la convergence de la suite (a_n).

Exercice 3. *(3 pt)*
1) Question de cours : Montrer que deux suites adjacentes convergent vers la même limite.
2) On pose $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k+n}$ et $v_n = \sum\limits_{k=n}^{2n} \dfrac{1}{k}$. Ces deux suites sont-elles adjacentes ?

Exercice 4. *(6 pt)*
Les questions sont indépendantes.
1) Simplifier les expressions suivantes :
a) $a = (k+1)! - k! - k \times k!$, **b)** $b = \binom{n-2}{p} + 2\binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p-2} - \binom{n}{p}$.
2) Résoudre $\binom{2n}{2} = 1$.
3) Fabien Galthié a sélectionné 33 joueurs pour la coupe du monde. Il y en a 12 à l'infirmerie en ce moment. De combien de façon peut-il constituer une équipe (15 joueurs) pour le prochain match ?
4) On possède une urne avec 10 balles (1 carmin, 2 vermillon, 3 bordeaux et 4 grenat). On en tire 2 simultanément.
a) Quel est le nombre total de tirages possibles ?
b) Quel est le nombre de tirages avec au moins un bordeaux ?
c) Quel est le nombre de tirages avec un carmin ou un vermillon ?
5) Quel est le nombre de podiums (les trois premiers) possibles à ce devoir ? (35 étudiants).
6) Rappeler la définition de la surjection et déterminer le nombre de surjections d'un ensemble à 7 éléments sur un ensemble à 6 éléments.

Correction Devoir Surveillé 2

Exercice 1.

1) a) $u_1 = 21$.

b) On conjecture que (d_n) est une suite arithmétique de raison 8 et de premier terme $d_0 = 16$.

2) On cherche à calculer $\sum_{k=0}^{n-1} v_k = n\dfrac{v_0 + v_{n-1}}{2} = 4n(3+n)$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose P_n : $\quad u_n = 4n^2 + 12n + 5$.

Initialisation : Pour $n = 0$, on a bien $u_0 = 4 \times 0^2 + 12 \times 0 + 5 = 5$.

Hérédité : On suppose P_n vraie pour n fixé.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \left(1 + \frac{2}{n+1}\right) u_n + \frac{6}{n+1} \\
&= \left(1 + \frac{2}{n+1}\right)(4n^2 + 12n + 5) + \frac{6}{n+1} \\
&= \frac{1}{n+1}\left[(n+3)(4n^2 + 12n + 5) + 6\right] \\
&= \frac{1}{n+1}(4n^3 + 24n^2 + 41n + 21)
\end{aligned}$$

Le polynôme $4n^3 + 24n^2 + 41n + 21$ admet -1 pour racine évidente et en factorisant (par identification ou division euclidienne), on trouve

$$u_{n+1} = \frac{\cancel{(n+1)}(4n^2 + 20n + 21)}{\cancel{n+1}} = 4(n+1)^2 + 12(n+1) + 5.$$ Donc P_{n+1} est vérifiée.

Conclusion : La propriété est initialisée au rang 0, elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4) On calcule donc $d_n = 4n^2 + 20n + 21 - (4n^2 + 12n + 5) = 8n + 16$. Donc (d_n) est bien arithmétique de raison 8 et de premier terme $d_0 = 16$.

Exercice 2.

1) $d_1 = 250$ et $a_1 = 445$.

2) a) On obtient 250 et 420 en sortie. Ce qui est incohérent avec la question précédente.

b) Le problème ne vient pas de l'appel de boucle range, car range(1,n+1) effectue n tours et non $n+1$, python n'effectuant jamais le dernier tour.

Le problème vient de ce que D a été transformé avant le calcul dans A. En général, on utilise une valeur tampon pour conserver la valeur de D dans le but de faire le calcul de A. Il suffit ici d'insérer $C = D$ juste avant la ligne du D... et de transformer en conséquence A.

```
D=300
A=450
n=int(input("Saisir la valeur n : "))
for k in range(1,n+1) :
   C=D    D=D/2+100
   A=A/2+C/2+70
print(D)
print(A)
```

Dans ce cas précis, on peut aussi intervertir les deux lignes de calcul (mais c'est un cas particulier).

3) a) On part de

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= d_{n+1} - 200 = \frac{1}{2}d_n + 100 - 200 \\ &= \frac{1}{2}d_n - 100 = \frac{1}{2}(d_n - 200) \\ &= \frac{1}{2}e_n \end{aligned}$$

donc (e_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $e_0 = 250$.

b) On a $e_n = 250\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Donc $d_n = 250\left(\frac{1}{2}\right)^n + 200$.

c) Il suffit de calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = \boxed{200}$ car $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ (en effet, $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$)

4) a) Il suffit d'écrire $2n^2 \geqslant (n+1)^2 \quad\Leftrightarrow\quad 2n^2 - (n+1)^2 \quad\Leftrightarrow\quad (\sqrt{2}n - n - 1)(\sqrt{2}n + n + 1) \geq 0$ qui est bien positif si $n \geq 3$.

b) Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N},\ n \geq 4$, on pose $P_n : \quad 2^n \geqslant n^2$.

Initialisation : Pour $n = 4$, on a bien $2^4 \geq 4^2$.

Hérédité : On suppose P_n vraie pour n fixé.

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &= 2 \times 2^n \\ &\geq 2n^2 \\ &\geq (n+1)^2 \end{aligned}$$

d'après ce qui précède.

Donc P_{n+1} est vérifiée.

Conclusion : La propriété est initialisée au rang 4, elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$.

c) La première partie de l'inégalité ne pose pas de problème.

On écrit $2^n \geqslant n^2 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{n^2} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{100}{2^n} \leq \frac{100}{n^2}$. On multiplie par n pour avoir l'inégalité demandée.

d) Par encadrement, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \boxed{340}$.

Exercice 3.

1) Voir cours.

2) On calcule :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k+n+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n} \\ &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{(2n+2) + (2n+1) - 2(2n+1)}{2(n+1)(2n+1)} \\ &= \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} \end{aligned}$$

Donc (u_n) est croissante.

De même,

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= \sum_{k=n+1}^{2n+2} \frac{1}{k} - \sum_{k=n}^{n+1} \frac{1}{k} \\
&= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n} \\
&= \frac{n(2n+2) + n(2n+1) - (2n+1)(2n+2)}{n(2n+1)(2n+2)} \\
&= \frac{-3n-2}{n(2n+1)(2n+2)}
\end{aligned}$$

Donc (v_n) est décroissante.

Enfin,

$$\begin{aligned}
v_n - u_n &= \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n} \\
&= \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$ et les suites sont adjacentes.

Exercice 4.

1) a) $a = (k+1) \times k! - k! - k \times k! = k!(k+1-1-k) = 0$.

b) On peut faire le calcul bourrin. Voici la correction pour ceux qui s'y sont frotter...

$$\begin{aligned}
b &= \frac{(n-2)!}{(n-2-p)!p!} + 2\frac{(n-2)!}{((n-2)-(p-1))!(p-1)!} + \frac{(n-2)!}{((n-2)-(p-2))!(p-2)!} - \frac{n!}{(n-p)!p!} \\
&= \frac{(n-2)!(n-1-p)(n-p)}{(n-p)!p!} + 2\frac{(n-2)!(n-p)p}{(n-p)!p!} + \frac{(n-2)!p(p-1)}{(n-p)!p!} - \frac{n!}{(n-p)!p!} \\
&= \frac{(n-2)!}{(n-p)!p!} \left[(n-1-p)(n-p) + 2p(n-p) + p(p-1) - n(n-1)\right] \\
&= \frac{(n-2)!}{(n-p)!p!} \underbrace{\left[n^2 - np - n + p - np + p^2 + 2np - 2p^2 + p^2 - p - n^2 + n\right]}_{=0} = 0.
\end{aligned}$$

Mais il est plus futé de remarquer que la relation de Pascal donne $\binom{n-2}{p} + \binom{n-2}{p-1} = \binom{n-1}{p}$ et $\binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p-2} = \binom{n-1}{p-1}$. Et en combinant ces deux expressions, on trouve $\binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1} = \binom{n}{p}$ qui s'annule avec le dernier terme.

2) $\binom{2n}{2} = \dfrac{(2n)!}{(2n-2)!2!} = \dfrac{(\cancel{2}n)(2n-1)\cancel{(2n-2)!}}{\cancel{2}\cancel{(2n-2)!}} = n(2n-1)$.

On résout $n(2n-1) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2n^2 - n - 1 = 0$. Mais 1 est racine évidente. Le produit des racines est $\frac{-1}{2}$, donc l'autre racine est $\frac{-1}{2} \notin \mathbb{N}$. Finalement, une seule solution : $S = \{1\}$.

3) On a un tirage sans ordre et sans remise $\binom{21}{15} = \dfrac{21!}{15!6!} = \dfrac{21 \times \cancel{20} \times 19 \times \cancel{18} \times 17 \times 16}{\cancel{6} \times \cancel{5} \times \cancel{4} \times \cancel{3} \times 2} = \boxed{54\ 264}$.

4) a) Le plus simple est de faire un arbre, le nombre de tirages étant non ordonné mais dépendant des doublons. Il y a 3 tirages monochromes et 6 tirages bichromates, soit $\boxed{9}$ tirages au total.

b) Par complémentaire, sans le bordeaux, il y a $2+3=5$ tirages, soit $9-5=\boxed{4}$ tirages.

c) Pour les carmins, il y a 3 tirages différents ; pour les vermillons, 4 à cause du doublet. Soit au total, $3+4-1=\boxed{6}$ en enlevant le tirage de l'intersection : vermillon-carmin.

5) On procède à un tirage de $p = 3$ parmi $n = 35$ élèves sans remise et avec ordre, soit $A_{35}^{3} = 35 \times 34 \times 33 = \boxed{39\ 270}$.

6) Une surjection est une application telle que chaque élément de l'ensemble d'arrivée ait au moins un antécédent dans l'ensemble de départ.

On choisit un élément que l'on sort temporairement de la liste (7 choix). On affecte une image à chacun des éléments de l'ensemble de départ, soit 6! possibilités. Il reste à affecter le dernier élément, soit 6 possibilités. Mais en faisant cela, on a compté deux fois chaque applications. Soit

$$\frac{7 \times 6! \times 6}{2} = \boxed{2720}.$$