15/12/2022 (2h)

Devoir Surveillé $n°4$

TF 2022-2023 Lycée Gustave Eiffel

Les documents ne sont pas autorisés. Les doudoux (y compris portables et calculatrices) sont éteints, rangés dans les sacs, eux-mêmes déposés au fond de la salle ou au pied du tableau.

Exercice 1. *(3 pt)*
Killian a deux enfants. On considère les évènements suivants :

A : "les deux enfants sont de sexes différents",
B : "L'ainé est un garçon",
C : "Le cadet est une fille".

RÉDIGEZ !
1) Montrer que les évènements A et B sont indépendants.
2) A-t-on $p(A \cap B \cap C) = p(A) \times p(B) \times p(C)$?

Exercice 2. *(4 pt)*
On lance trois dés simultanément.
1) De combien de façons peut-on obtenir 10 ?
2) Et 9 ?
3) Montrer que la probabilité d'obtenir 10 est supérieure à celle d'obtenir 9. Expliquez.

Exercice 3. *(4pt)*
On pose $A(1, 0, -1)$, $B(-2, 3, 4)$, $C(-6, 8, 11)$ et $D(0, 2, 1)$.
1) Les points A, B, C et D sont-ils coplanaires ?
2) Quelle est la nature de $ABCD$?
3) Déterminer l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que $x + y + z = 1$ et $(AM)//(CD)$.

Exercice 4. *(9 pt)*
On considère la fonction $f : x \mapsto x \sin \dfrac{1}{x}$.
1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Peut-on prolonger f par continuité ?
3) La courbe $\mathscr{C}_f$ admet-elle une asymptote ?
4) Montrer que f n'est pas dérivable en 0.
5) Etudier la dérivabilité en dehors de 0.
6) Déterminer la dérivée de f.
7) On se place sur l'intervalle $I = \left[\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Etudiez les variations de f sur I.

Exercice 5. *(5 pt)*
On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{2 + \cos x}$.
Tout ce que vous savez faire sur cette fonction. On finira par une représentation graphique avec un repère de 3cm (ou trois carreaux) sur l'axe des abscisses pour π.

Correction Devoir Surveillé 4

Exercice 1.

1) On a $\Omega = \{FF, FG, GF, GG\}$ en notant les sexes des enfants dans l'ordre. On a $A = \{FG, GF\}$ et $B = \{GF, GG\}$.

Ainsi, $p(A) = \dfrac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$ et $p(B) = \dfrac{1}{2}$. De plus, $p(A \cap B) = \dfrac{1}{4}$ car $A \cap B = \{GF\}$.

Comme $p(A) \times p(B) = p(A \cap B)$, alors les évènement A et B sont indépendants.

2) Non. Car, avec les mêmes notations, $p(A \cap B \cap C) = \dfrac{\text{card}(\{GF\})}{4} = \dfrac{1}{4}$ alors que $p(A) \times p(B) \times p(C) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{8}$.

Exercice 2.

1) Il y a six façons d'obtenir 10 : $(1,3,6), (1,4,5), (2,2,6), (2,3,5), (2,4,4), (3,3,4)$.
2) Idem : $(1,2,6), (1,3,5), (1,4,4), (2,2,5), (2,3,4), (3,3,3)$
3) Il y a le piège de l'ordre ! En effet, il y a 6 possibilités d'obtenir $(1,3,6)$, alors que $(2,2,6)$ n'apparaît que deux fois.

Au total, le 10 apparaît $6+6+3+6+3+3 = 27$ possibilités.
et le 9 : $6+6+3+3+6+1 = 25$ possibilités à cause du triplet de 3.

Ainsi, la probabilité d'obtenir 10 est supérieure à celle d'obtenir 9 : $p(10) = \dfrac{27}{\text{card}(\Omega)} = \dfrac{27}{6^3} = \boxed{\dfrac{1}{8}}$ car le tirage est avec ordre et avec remise.

Et $p(9) = \dfrac{25}{216}$.

Exercice 3.

1) On calcule les vecteurs $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -7 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

On cherche des réels $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\begin{aligned}
\alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} + \gamma\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{0} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -3\alpha - 7\beta - \gamma = 0 \\ 3\alpha + 8\beta + 2\gamma = 0 \\ 5\alpha + 12\beta + 2\gamma = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -3\alpha - 7\beta - \gamma = 0 & \\ \beta + \gamma = 0 & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ \cancel{\beta + \gamma = 0} & L_3 \leftarrow 3L_3 + 5L_1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Il existe donc des solutions non triviales au problème, e.g. $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, -1, 1)$. Donc les vecteurs sont liés et les points sont coplanaires.

2) On calcule $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$. On remarque $\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{AB}$, donc les vecteurs sont colinéaires (sans être égaux). $ABCD$ est donc un trapèze.

3) On calcule $\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z+1 \end{pmatrix}$. La colinéarité s'exprime par le fait qu'il existe un réel λ tel que

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{CD} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - 1 = 6\lambda \\ y = -6\lambda \\ z + 1 = -10\lambda \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad (x, y, z) = (6\lambda + 1, -6\lambda, -10\lambda - 1)
\end{aligned}$$

La condition imposée par le sujet est que $x+y+z=1 \quad \Leftrightarrow \quad 6\lambda-6\lambda-10\lambda-1=0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda=\frac{-1}{10}$.

Il n'y a qu'un seul point solution, le point de coordonnées $\left(\frac{4}{10},\frac{6}{10},0\right)$.

Exercice 4.

1) $\mathscr{D}_f=\{x\in\mathbb{R},\ x\neq 0\}=\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

2) On calcule $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ par encadrement.

- Si $x>0$, alors $-x\leq f(x)\leq x$ et on a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)=0$.
- Si $x>0$, alors $-x\geq f(x)\geq x$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} f(x)=0$.

Donc la fonction admet une limite finie en 0, on peut la prolonger : $\tilde{f}(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$.

3) Pas d'asymptote verticale. On étudie les limites en $\pm\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$. Donc par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\frac{1}{x}=0$. On a donc une forme indéterminée.

On pose donc $X=\frac{1}{x}$, ce qui nous ramène à $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{X\to 0}\frac{\sin X}{X}=1$, donc $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y=1$ au voisinage de $+\infty$. Idem en $-\infty$.

4) On calcule le tau $\tau_{f,0}(h)=\frac{\tilde{f}(h)-\tilde{f}(0)}{h}=\sin\frac{1}{h}$.

Si on pose $H=\frac{1}{h}$, que ce soit si $h>0$ ou si $h<0$, on cherche $\lim\limits_{H\to\infty}\sin H$ qui n'a pas de limite. Ainsi, f n'est pas dérivable en 0.

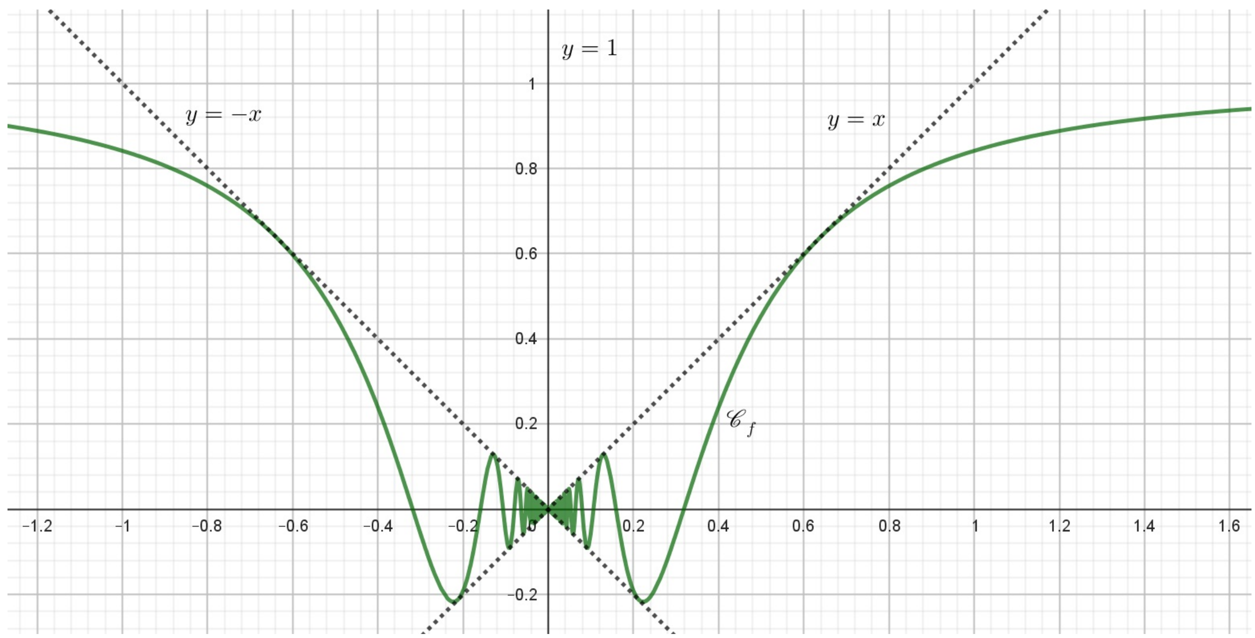
5) La fonction $u : x\mapsto\frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ et sin est dérivable aussi sur cet ensemble. Par composition, $\sin\circ u$ est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Par produit avec $x\mapsto x$, on trouve que f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

6) On utilise $(v\circ u)'=u'\times v'\circ u$ et $(uv)'=u'v+uv'$.

$$f'(x)=1\times\sin\frac{1}{x}+x\times\left(\frac{-1}{x^2}\right)\sin\frac{1}{x}=\boxed{\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}}$$

7) On utilise le fait que la fonction est paire pour ne l'étudier que sur $[0,\frac{\pi}{2}]$. On a $-x\leq f(x)\leq x$. La courbe est donc entre les deux bissectrices du repère. D'autre part, elle atteint ces droites en $x=\frac{1}{\frac{pi}{2}+k\pi}$ $(k\in\mathbb{Z})$.



Exercice 5.

Plusieurs choses à faire :

- $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$ car $-1 \leq \cos x \leq 1$.
- f est impaire car $f(-x) = \dfrac{\sin(-x)}{2+\cos(-x)} = \dfrac{-\sin x}{2+\cos x}$.
- f est 2π-périodique car sin et cos sont 2π-périodique.
- f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivable sur cet intervalle, dont le dénominateur ne s'annule pas.
- Pour la dérivée, on utilise la formule $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

$$f'(x) = \frac{\cos x \times (2+\cos x) - \sin x \times (-\sin x)}{(2+\cos x)^2} = \frac{2\cos x + 1}{(2+\cos x)^2}$$

- Les limites en $\pm\infty$ n'existent pas car $f(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = \frac{1}{2}$ et $f(\frac{-\pi}{2} + 2k\pi) = \frac{-1}{2}$.
- Pas d'asymptote.
- Pour les variations on travaille sur $[0, \pi]$, on cherche à résoudre $2\cos x + 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos x \geq \frac{-1}{2}$.

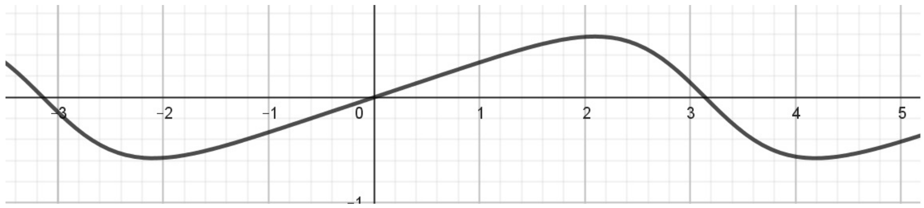
On trouve $x \in [0, \frac{2\pi}{3}]$. D'où le tableau de variation :

x	$-\pi$		$\frac{-2\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f'(x)$		$-$		$+$		$-$	
f	0	$\searrow$	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	$\nearrow$	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	$\searrow$	0

- La fonction admet un maximum qui vaut $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ atteint en $\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Idem pour le minimum qui vaut $\dfrac{-\sqrt{3}}{3}$ atteint en $\dfrac{-2\pi}{3} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

-



−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5
−1