4/12/2023 (2h)

Devoir Surveillé $n°$**4**

TE 2023-2024 Lycée Gustave Eiffel

Les documents ne sont pas autorisés. Les doudoux (y compris portables et calculatrices) sont éteints, rangés dans les sacs, eux-mêmes déposés au fond de la salle ou au pied du tableau.

Exercice 1. *(6 pt)*

On pose $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.

1) Etudier la limite de f en $+\infty$. En déduire une asymptote à la courbe.

2) Prouver que l'on peut prolonger f par continuité en 0.
Soit g le prolongement de f.

3) La fonction g est-elle dérivable en 0 ? Si oui, donner une équation de la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 0.

4) Etudier les variations de g et tracer $\mathscr{C}_g$.

Exercice 2. *(4 pt)*

Soient A, B et C trois points du plan. Déterminer les points M du plan tels que

$$||2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|| = ||\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}||$$

On veillera à faire un dessin.

Exercice 3. *(7 pt)*

A tout entier naturel non nul n, on associe la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \frac{4e^{nx}}{e^{nx}+7}$$

On désigne par $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1) Dans cette question seulement, on considère $n = 2$.

a) Montrer que $\mathscr{C}_n$ admet deux asymptotes.

b) Montrer que $0 < f_2(x) < 4$.

c) Montrer que f_2 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

d) Déterminer le nombre de solution de $f_2(x) = m$.

2) On émet un certain nombre de conjectures que l'on demande de démontrer :

a) Les courbes $\mathscr{C}_n$ possèdent les mêmes asymptotes.

b) Les fonctions f_n sont croissantes sur $\mathbb{R}$.

c) Les courbes $\mathscr{C}_n$ ont un point commun.

Exercice 4. *(3 pt)*

Tout ce que vous savez faire sur la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{e^x}{x}$

Correction Devoir Surveillé 4

Exercice 1.

1) On a une forme indéterminée de la forme $\frac{\infty}{\infty}$. On factorise donc par le plus gros :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{\frac{1}{\sqrt{x}}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{x} = \frac{\sqrt{\frac{1}{\sqrt{x}}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$$

La forme indéterminée a disparue puisque le numérateur tend vers 1 et le dénominateur vers $+\infty$, d'où la limite : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \boxed{0}$.

2) La limite en 0 est elle aussi une forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$. On utilise ici une expression conjuguée :

$$f(x) = \frac{\sqrt{(1+x)^2 - 1^2}}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)} = \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+x}+1\right)} = \frac{1}{\sqrt{1+x}+1}.$$

Quand x tend vers 0 (à gauche et à droite), on a $f(x)$ qui tend vers $\frac{1}{2}$. On prolonge donc f par continuité en 0 :

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [-1;0[\cup]0,+\infty[\\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

3) Pour déterminer la dérivabilité de g, il faut calculer la limite du taux :

$$\begin{aligned} \tau_{g,0}(h) = \frac{g(h)-g(0)}{h} &= \frac{\frac{\sqrt{1+h}-1}{h} - \frac{1}{2}}{h} = \frac{2\sqrt{1+h}-(2+h)}{2h^2} \\ &= \frac{4(1+h)-(2+h)^2}{2h^2(2\sqrt{1+h}+(2+h))} \quad \text{(par expression conjuguée)} \\ &= \frac{-\cancel{h^2}}{2\cancel{h^2}(2\sqrt{1+h}+(2+h))} \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\lim_{h\to 0} \tau_{g,0}(h) = \frac{-1}{8}}$ donc la limite du taux existe et g est dérivable en 0.

Equation de la tangente : $y - g(0) = g'(0)(x-0) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{y = \frac{-1}{8}x + \frac{1}{2}}$.

4) La fonction g est dérivable sur $]-1,+\infty[$ (car $u : x \longmapsto \sqrt{1+x}$ est dérivable sur cet ensemble et on a démontré qu'elle était dérivable en 0). On peut donc calculer la dérivée :

On a $u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$ et

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{\frac{x}{2\sqrt{1+x}} - (\sqrt{1+x}-1)}{x^2} = \frac{x - 2(1+x) + 2\sqrt{1+x}}{2x^2\sqrt{1+x}} \\ &= \frac{2\sqrt{1+x}-(2+x)}{2x^2\sqrt{1+x}} = \frac{4(1+x)-(2+x)^2}{2x^2\sqrt{1+x}(2\sqrt{1+x}+(2+x))} \quad \text{par expression conjuguée} \\ &= \frac{-1}{2\sqrt{1+x}(2\sqrt{1+x}+2+x)} < 0 \end{aligned}$$

Donc g est strictement décroissante sur $[-1,+\infty[$.

Exercice 4.

$\mathscr{D}_f$, parité, dérivée, variations, asymptotes, limites, période, graphe