8/1/2024 (2h)

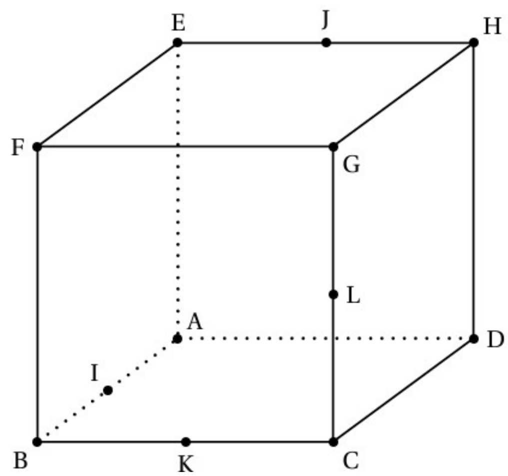
Devoir Surveillé $n°$**5**

TE 2023-2024 | Lycée Gustave Eiffel

Les documents ne sont pas autorisés. Les doudoux (y compris portables et calculatrices) sont éteints, rangés dans les sacs, eux-mêmes déposés au fond de la salle ou au pied du tableau.

Exercice 1. *(7 pt)*

ABCDEFGH est un cube.



I est le milieu du segment [AB], J est le milieu du segment [EH], K est le milieu du segment [BC] et L est le milieu du segment [CG].

On munit l'espace du repère orthonormé $\left(\mathrm{A}; \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.

1) a) Démontrer que la droite (FD) est orthogonale au plan (IJK).
b) En déduire une équation cartésienne du plan (IJK).
2) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (FD).
3) Soit M le point d'intersection de la droite (FD) et du plan (IJK). Déterminer les coordonnées du point M.
4) Déterminer la nature du triangle IJK et calculer son aire.
5) Calculer le volume du tétraèdre FIJK.
6) Les droites (IJ) et (KL) sont-elles sécantes ?

Exercice 2. *(8 pt)*

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

On s'intéresse aux fonctions f dérivables sur $[0\ ;\ +\infty[$ vérifiant les conditions

$$\begin{cases} (1) & : \quad f'(x) = 4 - [f(x)]^2 \quad \text{pour tout réel } x \text{ appartenant Ã } [0\ ;\ +\infty[\\ (2) & : \quad f(0) = 0 \end{cases}$$

On admet qu'il existe une unique fonction f vérifiant simultanément (1) et (2).
Les deux parties peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A. Partie A. Etude d'une suite

Afin d'obtenir une approximation de la courbe représentative de la fonction f on utilise la méthode itérative d'Euler avec un pas égal à $0,2$.

On obtient ainsi une suite de points notés (M_n), d'abscisse x_n et d'ordonnée y_n telles que :

$$\begin{cases} x_0 = 0 & \text{et pour tout entier naturel} \quad n,\ x_{n+1} = x_n + 0,2 \\ y_0 = 0 & \text{et pour tout entier naturel} \quad n,\ y_{n+1} = -0,2y_n^2 + y_n + 0,8 \end{cases}$$

1) Expliquez comment la formule de y_{n+1} a été obtenue.

2) Pour x réel, on pose $p(x) = -0,2x^2 + x + 0,8$. Montrer que si $x \in [0\ ;\ 2]$ alors $p(x) \in [0\ ;\ 2]$.

a) Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant y_n \leqslant 2$.

b) Etudier le sens de variation de la suite (y_n).

c) La suite (y_n) est-elle convergente ?

d) Si oui, vers quoi ?

<u>Partie B.</u> Partie B. Etude d'une fonction

Soit g la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = 2\left(\dfrac{\mathrm{e}^{4x} - 1}{\mathrm{e}^{4x} + 1}\right)$ et $(\mathcal{C}_g)$ sa courbe représentative.

1) a) Montrer que la fonction g vérifie les conditions (1) et (2).

b) Etudier sa parité.

2) a) Montrer que $(\mathcal{C}_g)$ admet une asymptote Δ dont on donnera une équation.

b) Etudier les variations de g sur $[0\ ;\ +\infty[$.

3) Déterminer le nombre de point d'intersection de Δ et de la tangente à $(\mathcal{C}_g)$ à l'origine.

4) Déterminer les abscisses de ces éventuels points.

Exercice 3. *(5 pt)*

Donner les primitives des fonctions suivantes :

1) $f_1(x) = 3x + 1$

2) $f_2(x) = (x-1)(x+2)$

3) $f_3(x) = \dfrac{1}{x^2}$

4) $f_4(x) = \dfrac{1}{x^5}$

5) $f_5(x) = sin(3x)$

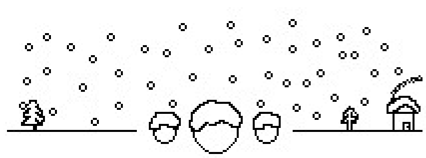
6) $f_6(x) = e^{x+2}$

7) $f_7(x) = cos^2(x)$

8) $f_8(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$

9) $f_9(x) = \tan x$

10) $f_{10}(x) = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$



Correction Devoir Surveillé 5

Exercice 2.

Partie B.

4)

Exercice 3.

1)

2)

3)

4)

5)

6)

7)

8)

9)

10)