Classe : T^{ale}S€2 DEVOIR SURVEILLE
Nom N°5
Jeudi 21 décembre (1h)

Les documents et la calculette ne sont pas autorisés. Le barème est indicatif sur 20 points.

<u>*Exercice* 1</u> : Résoudre.

1. $e^{x+1} \geq -1$,
2. $e^{x+1} + e^{2x} \geq 1$,
3. $e^{x+1} + e^{x-1} \leq 1$,
4. $e^{x-3} \geq e^{3x}$,
5. $\dfrac{e^{x-3}}{e^{2-x}} \geq 1$
6. $\ln(x+2) \geq 1$,
7. $\ln(x+2) + \ln(1-x) \geq 2$,
8. $\ln[(x+2)(1-x)] \geq 2$,
9. $\ln\left[\dfrac{(x+1)}{(x-2)}\right] \geq 1$.
10. $\ln(x^2) = 1$

<u>*Exercice* 2</u> : Trouver les modules et arguments de z quand c'est possible.

1. $z = (1+i)(2i - 4\sqrt{3})$,
2. $z = \cos\dfrac{\pi}{4} - i\sin\dfrac{\pi}{4}$,
3. $z = \left(-e^{\frac{i\pi}{12}}\right)^7$,
4. $z^2 = \sqrt{3} + i$,
5. $z^2 + (-3i+1)z + (4-4i) = 0$,
6. $\dfrac{1}{z} = 1 - i$
7. $z + i\bar{z} = 0$,
8. $z^2 - \left(\bar{z}\right)^2 = 0$,
9. $z + 1 \leq i$.
10. $z = 2e^{\frac{i\pi}{3}+5}$

Classe : T^{ale}S€2 DEVOIR SURVEILLE
Nom N°5
Jeudi 21 décembre (1h)

Les documents et la calculette ne sont pas autorisés. Le barème est indicatif sur 20 points.

<u>*Exercice* 1</u> : Résoudre.

1. $e^{x+1} \geq -1$,
2. $e^{x+1} + e^{2x} \geq 1$,
3. $e^{x+1} + e^{x-1} \leq 1$,
4. $e^{x-3} \geq e^{3x}$,
5. $\dfrac{e^{x-3}}{e^{2-x}} \geq 1$
6. $\ln(x+2) \geq 1$,
7. $\ln(x+2) + \ln(1-x) \geq 2$,
8. $\ln[(x+2)(1-x)] \geq 2$,
9. $\ln\left[\dfrac{(x+1)}{(x-2)}\right] \geq 1$.
10. $\ln(x^2) = 1$

<u>*Exercice* 2</u> : Trouver les modules et arguments de z quand c'est possible.

1. $z = (1+i)(2i - 4\sqrt{3})$,
2. $z = \cos\dfrac{\pi}{4} - i\sin\dfrac{\pi}{4}$,
3. $z = \left(-e^{\frac{i\pi}{12}}\right)^7$,
4. $z^2 = \sqrt{3} + i$,
5. $z^2 + (-3i+1)z + (4-4i) = 0$,
6. $\dfrac{1}{z} = 1 - i$
7. $z + i\bar{z} = 0$,
8. $z^2 - \left(\bar{z}\right)^2 = 0$,
9. $z + 1 \leq i$.
10. $z = 2e^{\frac{i\pi}{3}+5}$

<u>Exercice 1</u> :

1. $e^{x+1} \geq -1$,
   Comme $e^x > 0$ pour tout *x*, on a $S_1 = \mathbb{R}$.
2. $e^{x+1} + e^{2x} \geq 1$,
   On pose $X = e^x$, ce qui donne $Xe + X^2 - 1 \geq 0$. On étudie le signe du trinôme du deuxième degré : $\Delta = e^2 + 4 > 0$. Donc $X \in \left]-\infty, \frac{-e-\sqrt{e^2+4}}{2}\right] \cup \left[\frac{-e+\sqrt{e^2+4}}{2}, +\infty\right[$.
   On revient à *x* : $S_2 = \left[\ln \frac{-e+\sqrt{e^2+4}}{2}, +\infty\right[$.
3. $e^{x+1} + e^{x-1} \leq 1$,
   $e^x(e + e^{-1}) \leq 1 \Leftrightarrow e^x \leq \frac{1}{e+e^{-1}}$. On peut appliquer le ln qui est croissant sur $]0, +\infty[$.
   Donc $S_3 = \left]-\infty, \ln \frac{1}{e+e^{-1}}\right]$.
4. $e^{x-3} \geq e^{3x}$,
   Encore avec la croissance du ln, on trouve $x - 3 \geq 3x \Leftrightarrow -3 \geq 2x \Leftrightarrow \frac{-3}{2} \geq x$ et
   $S_4 = \left]-\infty, \frac{-3}{2}\right]$.
5. $\frac{e^{x-3}}{e^{2-x}} \geq 1$,
   On écrit $\frac{e^{x-3}}{e^{2-x}} \geq 1 \Leftrightarrow e^{x-3} \geq e^{2-x} \Leftrightarrow x - 3 \geq 2 - x \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{2}$. Donc $S_5 = \left[\frac{5}{2}, +\infty\right[$.
6. $\ln(x+2) \geq 1$,
   On utilise l'exponentiel qui est croissant sur $\mathbb{R}$, ce qui donne $x + 2 \geq e \Leftrightarrow x \geq e - 2$ et $S_6 = [e-2, +\infty[$
7. $\ln(x+2) + \ln(1-x) \geq 2$,
   On commence par vérifier le domaine de validité de l'expression de gauche : il faut $x > -2$ et $x < 1$, ce qui donne $x \in]-2;1[$. On utilise la relation fonctionnelle et l'exponentielle pour obtenir $(x+2)(1-x) \geq e^2 \Leftrightarrow x^2 - x + 2 - e^2 \geq 0$. Le discriminant $\Delta = 9 - 4e^2 < 0$, donc pas de solution : $S_7 = \varnothing$.
8. $\ln[(x+2)(1-x)] \geq 2$,
   On retrouve le problème précédent avec un domaine plus vaste, ce qui ne change rien car il n'y a pas de solution à l'équation de degré 2. $S_8 = \varnothing$
9. $\ln\left[\frac{(x+1)}{(x-2)}\right] \geq 1$.
   Toujours pareil avec l'exponentiel qui donne $\frac{(x+1)}{(x-2)} \geq e$ avec $x \in]-\infty, -1[\cup]2, +\infty[$.
   Ce qui fournit $\frac{x(1-e)+(1+2e)}{x-2} \geq 0$ et finalement $S_9 = \left[\frac{1+2e}{e-1}, +\infty\right[$
10. $\ln(x^2) = 1$
    En utilisant la bijection de l'exponentiel, on trouve $x^2 = e$ et $S_{10} = \{-\sqrt{e}, \sqrt{e}\}$

Exercice 2 : Tous les arguments sont donnés à 2π près.

1. $z=(1+i)(2i-4\sqrt{3})$,

Pas de problème pour le module qui est le produit des deux : $2\sqrt{13}\sqrt{2}$.

En revanche, pour l'angle, le premier donne $\frac{\pi}{4}$, mais le second n'est pas connu. Il s'agit de l'angle θ dont le sinus et le cosinus valent respectivement $\frac{1}{\sqrt{13}}$ et $\frac{-2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$.

2. $z=\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}$,

Attention au piège. Il y a un signe négatif entre la partie réelle et la partie imaginaire. $z=\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)$. Donc le module vaut 1 et l'argument $\frac{-\pi}{4}$.

3. $z=\left(-e^{\frac{i\pi}{12}}\right)^7$,

Attention encore au module qui ne peut pas être négatif. $z=-e^{\frac{7i\pi}{12}}=e^{\frac{7i\pi}{12}+i\pi}$. Le module vaut donc 1 là encore et l'argument $\frac{19\pi}{12}$.

4. $z^2=\sqrt{3}+i$,

On a $z^2=2e^{\frac{i\pi}{6}}$. Donc le module de z vaut $\sqrt{2}$ et un argument vérifie :
$2\theta\equiv\frac{\pi}{6}\ (2\pi)\Leftrightarrow\theta\equiv\frac{\pi}{12}\ (\pi)$ ce qui donne deux solution modulo 2π : $\frac{\pi}{12}$ et $\frac{13\pi}{12}$

5. $z^2+(-3i+1)z+(4-4i)=0$,

On cherche le discriminant qui vaut $\Delta=-24+10i$ La recherche d'un nombre qui au carré vaut Δ donne $\delta=1+5i$, d'où les solutions $z_1=4i=4e^{\frac{i\pi}{2}}$ et $z_2=-1-i=\sqrt{2}e^{\frac{5i\pi}{4}}$.

6. $\frac{1}{z}=1-i$

$\frac{1}{z}=\sqrt{2}e^{\frac{-i\pi}{4}}\Leftrightarrow z=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{i\pi}{4}}$

7. $z+i\bar{z}=0$,

Avec la forme algébrique, cela donne $(a+b)+i(a+b)=0\Leftrightarrow a=-b$. Donc le module est quelconque et l'argument vaut $\frac{-\pi}{4}$ (quand le module est non nul)

8. $z^2-\left(\bar{z}\right)^2=0$,

En utilisant encore une fois la forme algébrique, cela donne
$(a+ib)^2-(a-ib)^2=0\Leftrightarrow 4iab=0\Leftrightarrow a=0$ ou $b=0$ Les complexes cherchés sont les réels et les imaginaires purs.

9. $z+1\leq i$.

Pas de relation d'ordre sur les complexes. La question n'a pas de sens.

10. $z=2e^{\frac{i\pi}{3}+5}$

On réécrit le complexe : $z=2e^5e^{\frac{i\pi}{3}}$. Le module vaut $2e^5$ et un argument vaut $\frac{\pi}{3}$