Classe : T^{ale}S€1&2
Nom

DEVOIR SURVEILLE
COMMUN
Mardi 27 janvier (2h)

Les documents et la calculette ne sont pas autorisés. Le barème est indicatif sur 20 points.

On rendra deux copies nominatives séparées : une contenant vos réponses deux premiers exercices (avec l'annexe du deuxième) et une contenant le troisième.

Exercice 1 (5*pts)*: QCM *On ne demande pas de justification. Les réponses exactes rapportent 1 points, l'absence de réponse ne change pas le score et les réponses fausses 'rapportent' -0,5. Pour chaque question, une seule réponse est exacte.*

1. Soit $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $\overline{z} + |z| = 6 + 2i$. L'écriture algébrique de z est :

   a) $\frac{8}{3} - 2i$ **b)** $\frac{-8}{3} - 2i$ **c)** $\frac{8}{3} + 2i$ **d)** $\frac{-8}{3} + 2i$.

2. Dans le plan complexe, l'ensemble des points M d'affixe $z = x + iy$ vérifiant $|z-1| = |z+i|$ est la droite d'équation :

   a) $y=x-1$ **b)** $y= -x$ **c)** $y= -x+1$ **d)** $y=x$.

3. Soit n un entier naturel. Le nombre $\left(1+i\sqrt{3}\right)^n$ est réel si et seulement si, n s'écrit sous la forme :

   a) $3k+1$ **b)** $3k+2$ **c)** $3k$ **d)** $6k$.

4. Soit l'équation (E) : $z = \frac{6-z}{3-z}$ avec z complexe. Une solution de (E) est :

   a) $-2-\sqrt{2}\,i$ **b)** $2+\sqrt{2}\,i$ **c)** $1-i$ **d)** $-1-i$.

5. Soient deux points A et B d'affixes respectives i et $\sqrt{3}$ dans un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$. L'affixe du point C tel que le triangle ABC soit équilatéral avec $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{3}$ est :

   a) $-i$ **b)** $2i$ **c)** $\sqrt{3}+i$ **d)** $\sqrt{3}+2i$

Exercice 2 (7*pts)*: On considère la fonction f définie sur R par

$$f(x) = \ln(1+e^{-x}) + \frac{1}{3}x$$

La courbe (C) représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal est donnée en annexe.
Cette annexe sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

Partie A

1. a) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{3}x$ est asymptote à la courbe (C).

Tracer (D) sur l'annexe.

c) Étudier la position relative de (D) et de (C).

d) Montrer que pour tout réel x, $f(x) = \ln(e^x + 1) - \frac{2}{3}x$

e) En déduire la limite de f en $-\infty$.

2. a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

Montrer que pour tout x réel, $f'(x) = \frac{e^x - 2}{3(e^x + 1)}$.

b) En déduire les variations de la fonction f.

Partie B

Dans cette partie, on cherche à mettre en évidence une propriété de la courbe (C).
On note (T) la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

1. Calculer le coefficient directeur de (T) puis construire (T) sur le graphique.

2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Soient M et N deux points de la courbe (C) d'abscisses non nulles et opposées.
Montrer que la droite (MN) est parallèle à la droite (T).

<u>*Exercice 3*</u> (8*pts)*: Le but est d'étudier la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geq 1$ par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k^2}$$

1. **a)** Etudier les variations de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x^2}$.

   b) Calculer la limite de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$.
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
3. **a)** Montrer que, pour tout $k \geq 1$, on a $\dfrac{\ln k}{k^2} \leq \dfrac{1}{k\sqrt{k}}$.

   b) Etablir que si $k > 1$, on a $\dfrac{1}{2k\sqrt{k}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{k-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{k}}$.

   c) En déduire que $u_n \leq 2 - \dfrac{2}{\sqrt{n}}$.

   d) Peut-on en déduire que la suite (u_n) est majorée ?

   e) Montrer que la suite (u_n) est convergente.
4. **a)** Montrer que $u_{2n} - u_n \leq \dfrac{\ln(2n)}{n+1}$.

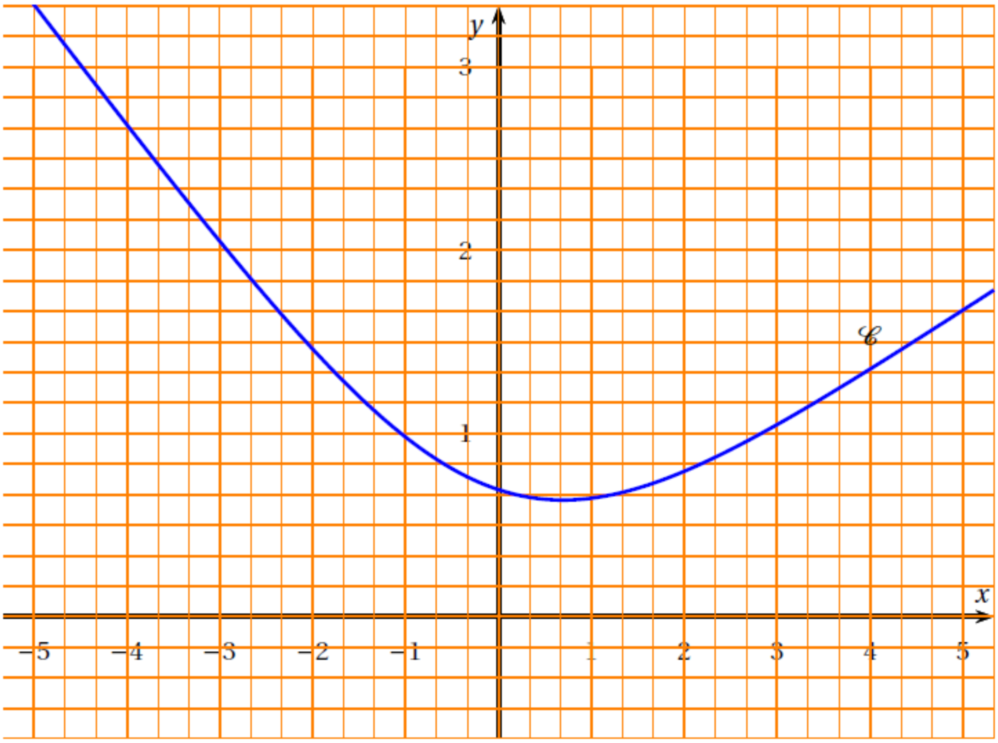
   b) En déduire par récurrence que $u_{2n} - u_1 \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{k+1}$.
5. Algorithmique :

   a) Quel est la sortie de l'algorithme suivant ? Expliquez.

$1 \to I$
$0 \to S$
Lire(N)
Tant que $I < N$ do
$S + \dfrac{\ln I}{I^2} \to S$
$I + 1 \to I$
Fin Tant que
Afficher(S)

   b) Modifier l'algorithme précédent afin qu'il donne le rang à partir duquel $u_n > 1$.

Annexe de l’exercice 2
Cette page sera complétée et remise avec la copie .



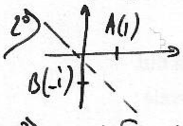
Correction du DS commun du Mardi 27 janvier 2015 (TSE1&2)

Exercice 1

1°) $|z| = \sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2 + (2)^2} = \frac{10}{3}$

Donc $\bar{z} + |z| = 6+2i$ si $z = \frac{8}{3} - 2i$ $\boxed{a}$

2°)



$|z-i| = |z+i| \iff AM = BM$.

$y = -x$ $\boxed{b}$

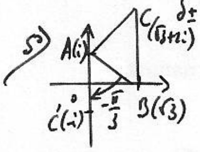
3°) $1+i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ $\quad (1+i\sqrt{3})^n = 2^n e^{\frac{in\pi}{3}}$

$(1+i\sqrt{3})^n \in \mathbb{R} \iff n = 3k$ $\boxed{c}$

4°) $z = \dfrac{6-\bar{z}}{\bar{z}-z} \Rightarrow z^2 - 4z + 6 = 0$ $\quad \Delta = (2i\sqrt{2})^2$

$z_\pm = \dfrac{4 \pm 2i\sqrt{2}}{2} = 2 \pm i\sqrt{2}$ $\boxed{b}$

5°)



$\boxed{d}$

Exercice 2

$f(x) = \ln(1+e^{-x}) + \frac{x}{3}$.

$\boxed{A}$ 1°) a) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$. Par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1+e^{-x}) = \ln 1 = 0$. Par somme avec $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{3} = +\infty$, on trouve $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \boxed{+\infty}$

b) D'après ce qui précède,

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x) - \frac{x}{3}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1+e^{-x}) = 0$.

Donc $\mathcal{C}_f$ admet la droite d'équation $y = \frac{x}{3}$ pour asymptote au voisinage de $+\infty$.

c) On étudie le signe de $f(x) - \frac{x}{3}$

$\ln(1+e^{-x}) \geq 0 \iff 1+e^{-x} \geq 1$ car exp est croissante sur $\mathbb{R}$.

$\iff e^{-x} \geq 0$ toujours vrai.

Donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la droite D

d) On a $\ln(1+e^{-x}) + \frac{x}{3} = \ln\left(e^{-x}(e^x+1)\right) + \frac{x}{3}$

$= \ln(e^{-x}) + \ln(e^x+1) + \frac{x}{3}$

$= -x + \ln(e^x+1) + \frac{x}{3}$

$= \ln(e^x+1) - \frac{2x}{3}$.

e) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$. Par composition, $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(e^x+1) = 0$ et par somme avec $\lim\limits_{x\to-\infty} -\frac{2x}{3} = +\infty$, on obtient $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \boxed{+\infty}$

2°) a) $u : x \mapsto e^x + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]1;+\infty[$.

ln est dérivable sur $]1;+\infty[$

Par composition, $x \mapsto \ln(e^x+1)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Par somme avec la fonction linéaire $x \mapsto \frac{-2x}{3}$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ Donc

$$f'(x) = \frac{e^x}{e^x+1} - \frac{2}{3} = \frac{3e^x - 2(e^x+1)}{3(e^x+1)} = \frac{e^x - 2}{3(e^x+1)}$$

b) Comme $e^x + 1 > 0$, on étudie le signe de $e^x - 2$.

$e^x - 2 \geq 0 \iff e^x \geq 2 \iff x \geq \ln 2$

car ln est croissant sur $]0;+\infty[$.

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$f(\ln 2)$	$\nearrow$	$+\infty$

$f(\ln 2) = \ln 3 - \frac{2}{3}\ln 2$

$\boxed{B}$ 1°) On cherche donc $f'(0) = \boxed{\dfrac{-1}{6}}$

2°) On pose $M(x, f(x))$ et $N(-x, f(-x))$

La pente de (MN) est donnée par

$$\frac{y_M - y_N}{x_M - x_N} = \frac{f(x) - f(-x)}{x - (-x)} = \frac{1}{2x}\left(\ln(e^x+1) - \frac{2x}{3} - \ln(e^{-x}+1) - \frac{2x}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{2x}\left(\cancel{\ln(e^x+1)} - \frac{2x}{3} - \underbrace{\ln(e^{-x})}_{x} - \cancel{\ln(1+e^{x})} - \frac{2x}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{2x} \times \left(\frac{-x}{3}\right) = \frac{-1}{6} = f'(0).$$

Donc $(MN) \parallel (T)$.

Exercice 3. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k^2}$

1°) a) f est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme produit de la fonction de référence $\ln$ et de la fraction rationnelle $x \mapsto \frac{1}{x^2}$.

On utilise $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

Donc $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\times x^2 - 2x\ln x}{x^4} = \frac{1-2\ln x}{x^3}$

$1-2\ln x \geq 0 \iff \frac{1}{2} \geq \ln x$

$\iff e^{\frac{1}{2}} \geq x$ car exp est croissant sur $\mathbb{R}$.

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$		$\searrow$	

b) On a $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

Par produit, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \boxed{0}$.

2°) $u_{n+1}-u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\ln k}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k^2}$

$= \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2} > 0$ car $n \geq 1$

Donc (u_n) est croissante.

3°) a) On pose $g(x) = \frac{\ln x}{x^2} - \frac{1}{x\sqrt{x}}$

$= \frac{\ln x - \sqrt{x}}{x^2}$

On veut le signe de $g(x)$, donc de $h(x) = \ln x - \sqrt{x}$. On a $h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2-\sqrt{x}}{2x}$

x	1		4		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
h		$\nearrow$	$h(4)$	$\searrow$	

$h(4) = \ln 4 - \sqrt{4} = 2(\ln 2 - 1) < 0$

Donc $g(x) \leq 0$ si $x \geq 1$ et

$\frac{\ln x}{x^2} \leq \frac{1}{x\sqrt{x}}$ si $x \geq 1$.

b) $\frac{1}{\sqrt{k-1}} - \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{\sqrt{k}-\sqrt{k-1}}{\sqrt{k}\sqrt{k-1}}$

$= \frac{k-(k-1)}{\sqrt{k}\sqrt{k-1}(\sqrt{k}+\sqrt{k-1})}$ (expression conjuguée.)

$= \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{k-1}(\sqrt{k}+\sqrt{k-1})}$

Or $\sqrt{k}+\sqrt{k-1} \leq 2\sqrt{k}$. Donc

$\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}} \geq \frac{1}{2\sqrt{k}}$ et $\frac{1}{\sqrt{k-1}} - \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{2k\sqrt{k-1}}$

Et comme $\sqrt{k-1} \leq \sqrt{k}$, on a bien

$\frac{1}{\sqrt{k-1}} - \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{2k\sqrt{k-1}} \geq \frac{1}{2k\sqrt{k}}$

c) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k^2} \leq \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{2}{\sqrt{k-1}} - \frac{2}{\sqrt{k}}\right)$ car $f(1) = 0$.

$u_n \leq 2 - \cancel{\frac{2}{\sqrt{2}}} + \cancel{\frac{2}{\sqrt{2}}} - \cancel{\frac{2}{\sqrt{3}}} + \cancel{\frac{2}{\sqrt{3}}} - \dots + \cancel{\frac{2}{\sqrt{n-1}}} - \frac{2}{\sqrt{n}}$ par télescopage.

Donc $u_n \leq 2 - \frac{2}{\sqrt{n}}$

d) Ainsi $u_n \leq 2$. La suite (u_n) est donc majorée par 2.

e) La suite est croissante (2°)) et majorée (3.d), D'après le théorème de limite monotone, elle est convergente.

4°) a) $u_{2n} - u_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln k}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k^2}$

$= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\ln k}{k^2}$

Pour $n+1 \leq k \leq 2n$, on a $\ln k \leq \ln 2n$ par croissance de $\ln$ sur $]0;+\infty[$.

Donc $u_{2n} - u_n \leq \ln 2n \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^2}$

De même, si $n+1 \leq k \leq 2n$, alors $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{(n+1)^2}$

Ainsi $u_{2n} - u_n \leq \ln 2n \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{(n+1)^2}$

$u_{2n} - u_n \leq \frac{\ln 2n}{(n+1)^2} \times n \leq \frac{\ln 2n}{n+1}$ car $\frac{n}{n+1} < 1$

b) Récurrence. (H_n) : "$u_{2n} - u_1 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln 2k}{k+1}$"

Initialisation : (H_1) est vraie car

$u_2 - u_1 \leq \frac{\ln 2}{2}$ d'après 4.a).

Hérédité : On suppose (H_n) vraie pour n fixé.

$u_{2(n+1)} - u_1 = \underbrace{u_{2n+2} - u_{2n}} + \underbrace{u_{2n} - u_1}$

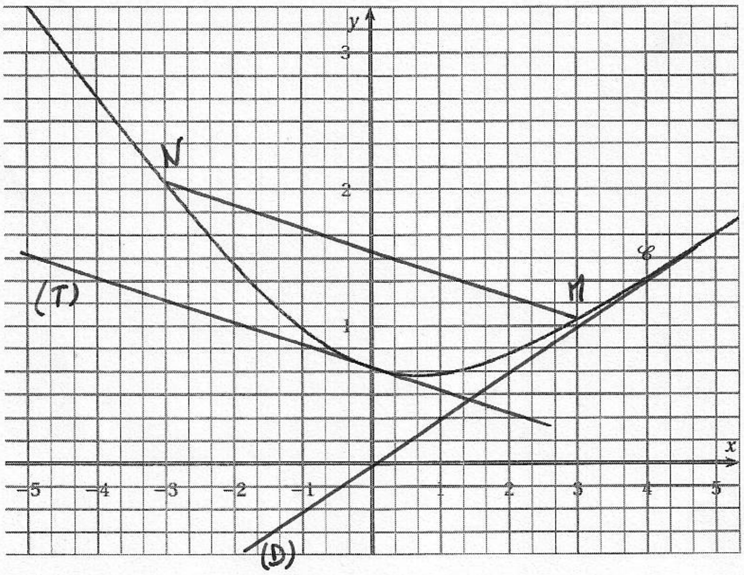
$\leq u_{2(n+1)} - u_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln 2k}{k+1}$ car $u_{2n} \geq u_{n+1}$ si $n \geq 1$

$\leq \frac{\ln(2(n+1))}{n+2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln 2k}{k+1}$ (u_n) croissante.

$\leq \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\ln 2k}{k+1}$ Donc (H_{n+1}) est vraie.

Conclusion : L'hypothèse est vraie au rang 1, elle est héréditaire. Elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Annexe de l'exercice 2
Cette page sera complétée et remise avec la copie .



<u>Exercice 3</u> : (Suite)

a) L'algorithme affiche $\boxed{U_{N-1}}$

En effet, quand I prend la valeur N, le test n'est pas réalisé (I<N) et $\frac{\ln N}{N}$ n'est pas ajouté à S.

b)

```
1 → I
0 → S
Tant que S ≤ 1 faire
    S + lnI/I² → S
    I + 1 → I
Fin tant que
Afficher (I-1)
```