6/10/2022 (1h)

Devoir Surveillé $n°1$

TE 2023-2024 Lycée Gustave Eiffel

Les documents ne sont pas autorisés. Les doudoux (y compris portables et calculatrices) sont éteints, rangés dans les sacs, eux-mêmes déposés au fond de la salle ou au pied du tableau. Le barème est indicatif.

Exercice 1. *(14 pt) En vrac*

Dans tout ce qui suit, $n \in \mathbb{N}$.

1) Ecrire 2023 en base 2, puis en base 8 et enfin en base 16.

2) Déterminer le nombre de multiples de 43 entre 10 000 et 100 000.

3) Si $n \equiv 14\ (42)$, existe-t-il α tel que 42 divise n^α ?

4) Quel est le reste de la division de $123\ 456^{78\ 910}$ par 7 ?

5) Effectuer la multiplication suivante en base 3 : $(210212)_3 \times (2011)_3$.

6) Le nombre $n^2 - 3n + 2$ est-il divisible par 2 ? par 3 ?

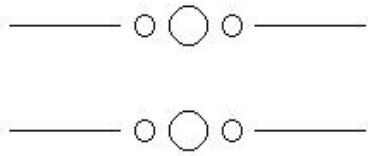
Exercice 2. *(6 pt)*

On veut montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, on a 609 qui divise $5^{4n} - 2^{4n}$.

1) Par récurrence.

a) Montrer par récurrence que

$$x^p - y^p = (x - y) \sum_{k=0}^{p-1} x^k y^{p-k-1}$$

b) En déduire le résultat attendu.

2) Montrez-le directement.