15/11/2022 (1h)

Devoir Surveillé $n°$2

TE2 2022-2023 Lycée Gustave Eiffel

Les documents ne sont pas autorisés. Les doudoux (y compris portables et calculatrices) sont éteints, rangés dans les sacs, eux-mêmes déposés au fond de la salle ou au pied du tableau. Le barème est indicatif.

Exercice 1. *(8 pt)*

On se propose de résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(E_1): \; z^4 - 2z^3 - z^2 - 2z + 1 = 0$.

1) Déterminer les solutions de $z^2 + z + 1 = 0$.

2) Montrer que si α est solution de (E_1) alors $\dfrac{1}{\alpha}$ est aussi une solution de (E_1).

3) Montrer que l'équation (E_1) est équivalente à : $(E_2): \; z^2\left[z^2 + \dfrac{1}{z^2} - 2\left(z + \dfrac{1}{z}\right) - 1\right] = 0$.

4) On pose $u = z + \dfrac{1}{z}$. Transformer $z^2 + \dfrac{1}{z^2} - 2\left(z + \dfrac{1}{z}\right) - 1 = 0$ afin de se ramener à la résolution d'une équation (E_3) du second degré en u.

5) Résoudre les équations (E_3) et (E_1).

Exercice 2. *(5 pt)*

Déterminer un critère de divisibilité par 31.

Exercice 3. *(3 pt)*

On pose $u_{n+1} = 3^{u_n}$ avec $u_1 = 3$.

Déterminer le dernier chiffre de u_n en fonction de n.

Exercice 4. *(4 pt)*

Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^4 + 6z^3 + 9z^2 + 100 = 0$.

Correction Devoir Surveillé 2

Exercice 1.

2) Il suffit de voir que le polynôme $P(X) = z^4 - 2z^3 - z^2 - 2z + 1$ est symétrique et donc $P\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \dfrac{1}{\alpha^4} - \dfrac{2}{\alpha^3} - \dfrac{1}{\alpha^2} - \dfrac{2}{\alpha} + 1 = \dfrac{\alpha^4 - 2\alpha^3 - \alpha^2 - 2\alpha + 1}{\alpha^4} = \dfrac{P(\alpha)}{\alpha^4} = 0$.

3) Pour l'équivalence, il suffit de développer.

4) $u^2 = x^2 + \dfrac{1}{x^2} + 2$. Ainsi, d'après (E_2), on doit résoudre $u^2 - 2 + 10u + 26 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u^2 + 10u + 24 = 0$ (E_3) car $x = 0$ est solution de (E_2) mais n'est pas solution de (E_1).

Mais -4 est racine pseudo évidente et donc $u^2 + 10u + 24 = (u+4)(u+6)$.

Il reste à revenir à x en résolvant $x + \frac{1}{x} + 4 = 0$ et $x + \frac{1}{x} + 6 = 0$.

La première donne pour solutions $x = -2 \pm \sqrt{3}$ et la seconde $x = -3 \pm 2\sqrt{2}$.

Exercice 3.

On étudie les puissances de 3 : $3^1 \equiv 3$ (10), $3^2 \equiv -1$ (10), $3^3 \equiv 7$ (10) et $3^4 \equiv 1$ (10).

D'autre part, u_n est impair par construction et comme $u_{n+1} \equiv (-1)^{u_n}$ (4), on a $u_{n+1} \equiv 3$ (4).

Ainsi $u_n \equiv \boxed{7}$ (10) si $n \geq 2$ et $u_1 \equiv 3$ (10).

Exercice 4.

$z = 1 \pm 2i$, $z = -4 \pm 2i$.