21/12/2023 (2h)

Devoir Surveillé $n°3$

T€ 2023-2024 Lycée Gustave Eiffel

Les documents ne sont pas autorisés. Les doudoux (y compris portables et calculatrices) sont éteints, rangés dans les sacs, eux-mêmes déposés au fond de la salle ou au pied du tableau. Le barème est indicatif.

Exercice 1. *(8 pt) Vrai ou faux*

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse et le prouver.

1) L'équation $z - i = i(z+1)$ a pour solution $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

2) Pour tout $x \in \left]\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, le nombre complexe $1 + e^{2ix}$ admet pour forme exponentielle $2\cos x e^{-ix}$.

3) Un point M d'affixe z tel que $|z - i| = |z + 1|$ appartient à la droite d'équation $y = -x$.

4) L'équation $z^5 + z - i + 1 = 0$ admet une solution réelle.

5) Pour tout n entier naturel non nul, $11^n - 2^n$ est premier.

6) Si $n > 1$, alors $p^3 + 1$ n'est jamais premier.

7) Si n est premier, alors M_n est premier.

8) 496 est parfait.

Exercice 2. *(12 pt)*

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ d'unité 2 cm. On appelle f la fonction qui, à tout point M, distinct du point O et d'affixe un nombre complexe z, associe le point M' d'affixe z' tel que

$$z' = -\frac{1}{z}.$$

1) On considère les points A et B d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}} = -1 + \mathrm{i}$ et $z_{\mathrm{B}} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

a) Déterminer la forme algébrique de l'affixe du point A' image du point A par la fonction f.

b) Déterminer la forme exponentielle de l'affixe du point B' image du point B par la fonction f.

c) Sur la copie, placer les points A, B, A' et B' dans le repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Pour les points B et B', on laissera les traits de construction apparents.

2) Soit r un réel strictement positif et θ un réel. On considère le complexe z défini par $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

a) Montrer que $z' = \frac{1}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi-\theta)}$.

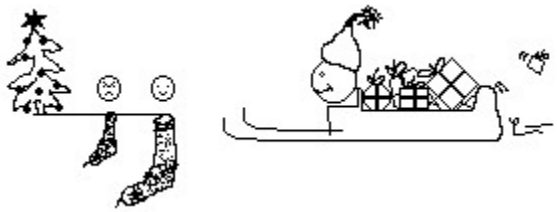
b) Est-il vrai que si un point M, distinct de O, appartient au disque de centre O et de rayon 1 sans appartenir au cercle de centre O et de rayon 1, alors son image M' par la fonction f est à l'extérieur de ce disque ? Justifier.

3) Soit le cercle Γ de centre K d'affixe $z_{\mathrm{K}} = -\frac{1}{2}$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

a) Montrer qu'une équation cartésienne du cercle Γ est $x^2 + x + y^2 = 0$.

b) Soit $z = x + \mathrm{i}y$ avec x et y non tous les deux nuls. Déterminer la forme algébrique de z' en fonction de x et y.

c) Soit M un point, distinct de O, du cercle Γ. Montrer que l'image M' du point M par la fonction f appartient à la droite d'équation $x = 1$.



Correction Devoir Surveillé 3

Exercice 2.

3) c)