6/12/2022 (2h)

Devoir Surveillé $n°$3

TE2 2022-2023 Lycée Gustave Eiffel

Les documents ne sont pas autorisés. Les doudoux (y compris portables et calculatrices) sont éteints, rangés dans les sacs, eux-mêmes déposés au fond de la salle ou au pied du tableau. Le barème est indicatif.

Exercice 1. *(6 pt)*

1) Déterminer les formes trigonométriques des complexes suivants :

a) $z_1 = 1 - i\sqrt{3}$,

b) $z_2 = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}$,

c) $z_3 = -4 + 4i$,

d) $z_4 = \sin\dfrac{-7\pi}{12} + i\cos\dfrac{7\pi}{12}$.

2) Calculer $Z = (2\sqrt{3} - 2i)^6$

a) En utilisant une forme trigonométrique.

b) Avec le binôme de Newton.

Exercice 2. *(3 pt)*

1) Quel est l'ensemble des points M du plan d'Argand Cauchy d'affixes z telles que $|z+1| = 2$?

2) Idem avec la condition $\arg(z) \equiv 0 \quad (2\pi)$.

Exercice 3. *(3 pt)*

On pose $P(z) = z^3 - 2(\sqrt{3}+i)z^2 + 4(1+i\sqrt{3})z - 8i$.

1) On sait que P possède une racine imaginaire pure. La déterminer.

2) En déduire une factorisation de P.

3) Déterminer les racines de P sous forme trigonométrique.

Exercice 4. *(4 pt)*

On cherche les entiers naturels n tels que 121 divise $n^2 + 3n + 5$.

1) Calculer $(n-59)^2 - 88$ modulo 121.

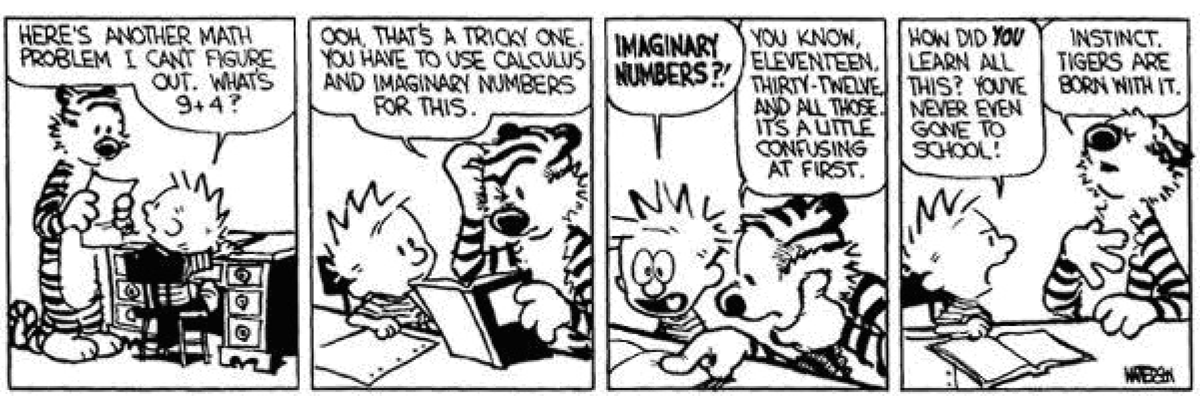
2) Conclure en raisonnant modulo 11.

Exercice 5. *(3 pt)*

Soient z et z' deux complexes, montrer que

$$|z+z'| + |z-z'| \geq |z| + |z'|.$$

Dans quel cas y a-t-il égalité ?



Correction Devoir Surveillé 3

Exercice 1.

1) a) $z_1 = 2(\cos\dfrac{-\pi}{3} + i\sin\dfrac{-\pi}{3})$.

b) $z_2 = \cos\dfrac{5\pi}{6} + i\sin\dfrac{5\pi}{6})$.

c) $z_3 = 4\sqrt{2}(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4})$.

d) On utilise $\cos\dfrac{7\pi}{12} = \cos\dfrac{-7\pi}{12}$ pour avoir le même angle.

$z_4 = \sin\dfrac{-7\pi}{12} + i\cos\dfrac{-7\pi}{12} = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{-7\pi}{12}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{-7\pi}{12}\right) = \cos\dfrac{-11\pi}{12} + i\sin\dfrac{-11\pi}{12}$.

2) a) $z = 2\sqrt{3} - 2i = 4(\cos\dfrac{-\pi}{6} + i\sin\dfrac{-\pi}{6})$. Donc $|Z| = |z|^6 = 4^6 = 4096$ et $\arg(Z) \equiv 6\arg(z)\ (2\pi)$.

Ainsi, $Z = 4^6(\cos -\pi + i\sin -\pi) = -4^6$.

b)

$$
\begin{aligned}
Z &= \sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} (2\sqrt{3})^k (-2i)^{6-k} \\
&= (-2i)^6 + 6(2\sqrt{3})(-2i)^5 + 15(2\sqrt{3})^2(-2i)^4 + 20(2\sqrt{3})^3(-2i)^3 + 15(2\sqrt{3})^4(-2i)^2 + 6(2\sqrt{3})^5(-2i) + (2\sqrt{3})^6 \\
&= -2^6 - 6\times 2^6 i\sqrt{3} + 15\times 2^6 \times 3 + 20\times 2^6 \times 3i\sqrt{3} - 15\times 2^6\times 3^2 - 6\times 2^6 \times 9i\sqrt{3} + 2^6 \times 3^3 \\
&= 2^6 \left[\underbrace{(-1 + 15\times 3 - 15\times 3^2 + 3^3)}_{=-64=-2^6} + i\sqrt{3}\underbrace{(-6 + 20\times 3 - 6\times 9)}_{=0} \right]
\end{aligned}
$$

$= -4^6$

Exercice 2.

1) Si A est le point d'affixe -1, alors $|z+1| = AM$. Il s'agit donc des points situé à une distance 2 de A, i.e. le cercle de centre A et de rayon 2.

2) On a l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ qui est constant, égal à 0, il s'agit donc de la demi droite horizontale $]Ox)$. Attention, 0 n'est pas dedans car il n'a pas d'argument.

Exercice 3.

1) On pose ib avec $b \in \mathbb{R}$ une racine de P. On obtient alors $P(ib) = (ib)^3 - 2(\sqrt{3}+i)(ib)^2 + 4(1 + i\sqrt{3})(ib) - 8i = 0 \quad\Leftrightarrow\quad -ib^3 + 2\sqrt{3}b^2 + 2ib^2 + 4ib - 4\sqrt{3}b - 8i = 0 \quad\Leftrightarrow\quad (2\sqrt{3}b^2 - 4\sqrt{3}b) + i(-b^3 + 2b^2 + 4b - 8) = 0$.

Soit le système $\begin{cases} 2\sqrt{3}b^2 - 4\sqrt{3}b = 0 \\ -b^3 + 2b^2 + 4b - 8 = 0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} b(b-2) = 0 \\ -b^3 + 2b^2 + 4b - 8 = 0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \boxed{b = 2}$.

La racine cherchée est donc $z_1 = 2i$.

2) Par division euclidienne ou identification, on trouve $P(z) = (z - 2i)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4)$.

3) On cherche les racines de $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4$ avec le discriminant : $\Delta = -4$. Donc les racines sont $z_2 = \dfrac{2\sqrt{3} - 2i}{2} = \sqrt{3} - i$ et $z_3 = \sqrt{3} + i$.

Les formes trigonométriques sont : $z_1 = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$

$z_2 = 2\left(\cos\dfrac{-\pi}{6} + i\sin\dfrac{-\pi}{6}\right)$

et $z_3 = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$.

Exercice 4.

1) On trouve n^2+3n+5.

2) On a $n^2+3n+5 \equiv (n-59)^2-88 \quad (121)$.

Si 121 divise n^2+3n+5, alors 11 divise $(n-59)^2$, donc 11 divise $n-59$. Ce qui donne 121 divise $(n-59)^2$. Ainsi, $n^2+3n+5 \equiv -88 \quad (121)$. Contradiction. Donc il n'existe pas d'entier n tel que 121 divise n^2+3n+5.

Exercice 5.

On utilise l'inégalité triangulaire : $|z+z'|+|z-z'| \geq |(z+z')+(z-z')| \quad \Leftrightarrow \quad |z+z'|+|z-z'| \geq |2z|$.
De même, $|z+z'|+|z'-z| \geq |(z+z')+(z'-z)| \quad \Leftrightarrow \quad |z+z'|+|z'-z| \geq |2z'|$.
On additionne les deux inégalités et c'est gagné.
Cas d'égalité : $z = \pm z'$.