

Les documents ne sont pas autorisés. Les doudoux (y compris portables et calculatrices) sont éteints, rangés dans les sacs, eux-mêmes déposés au fond de la salle ou au pied du tableau. Le barème est indicatif.

**Exercice 1.** (6 pt)

Parmi les matrices suivantes, effectuer tous les produits de deux matrices (avec remise) possibles.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad D = (1 \quad -1 \quad 2)$$

$$E = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

**Exercice 2.** (3 pt)

Soit la matrice  $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . On note  $E$  l'ensemble des matrices  $M$  de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  vérifiant :  $MK =$

$KM = M$ .

1) Montrer par l'absurde qu'aucune matrice de  $E$  n'est inversible.

2) Soit  $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$  une matrice de  $E$ .

Montrer que  $k = g = c = a$ ,  $h = b$  et  $f = d$ , puis en déduire la forme des matrices de  $E$ .

**Exercice 3.** (5 pt)

On cherche à résoudre le système suivant :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y - z = 1 \\ 2x - y + z = 2 \\ x + \alpha y = 3 \end{cases}$$

1) Dans cette partie,  $\alpha = 2$ .

a) Exprimer  $(S)$  sous la forme d'un produit matriciel.

b) Inverser la matrice en question et trouver la solution au système.

2) Essayer de faire de même avec  $\alpha = 1$ . Expliquer clairement la situation.

**Exercice 4.** (5 pt)

On pose  $A = \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ 10 & -7 \end{pmatrix}$ .

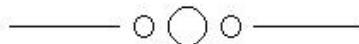
1) Calculer  $A^2$  et déterminer  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $A^2 + \alpha A + \beta I = (0)$ .

2) La matrice  $A$  est-elle inversible ?

**Exercice 5.** (5 pt)

Déterminer  $(u_n)$  et  $(v_n)$  en fonction de  $n$  avec

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 3v_n \\ v_{n+1} = 2v_n \end{cases} \quad \text{avec } (u_0, v_0) = (-2, 3)$$



## Correction Devoir Surveillé 4

### Exercice 1.

$A^2, AB, AE, BC, BF, CA, CB, CE, DA, DB, DE, ED, FC$ .

### Exercice 2.

- 1) Si  $M$  est inversible, alors  $MK = M \Leftrightarrow M^{-1}MK = M^{-1}M \Leftrightarrow K = I$  ce qui est faux.
- 2) On calcule

$$KM = \begin{pmatrix} g & h & k \\ d & e & f \\ a & b & c \end{pmatrix} \quad MK = \begin{pmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ k & h & g \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$$

Comme elles sont toutes égales, on obtient bien  $k = g = c = a$ ,  $h = b$  et  $f = d$ .

### Exercice 3.

- 1) b)  $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$  et  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -5 & -4 & 3 \end{pmatrix}$
- 2) La matrice n'est pas inversible.

### Exercice 4.

- 1) On trouve  $A^2 = \begin{pmatrix} 14 & -5 \\ 10 & -1 \end{pmatrix}$  et  $(\alpha, \beta) = (-1, -6)$ .
- 2) On a  $\frac{1}{6}(A - I)A = I$ , donc  $A^{-1} = \frac{1}{6}(A - I)$ .

