Les documents ne sont pas autorisés. Les doudoux (y compris portables et calculatrices) sont éteints, rangés dans les sacs, eux-mêmes déposés au fond de la salle ou au pied du tableau. Le barème est indicatif.

Exercice 1. *(6 pt)*
Parmi les matrices suivantes, effectuer tous les produits de deux matrices (avec remise) possibles.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. *(3 pt)*
Soit la matrice $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On note E l'ensemble des matrices M de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant : $MK = KM = M$.

1) Montrer par l'absurde qu'aucune matrice de E n'est inversible.

2) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$ une matrice de E.
Montrer que $k = g = c = a$, $h = b$ et $f = d$, puis en déduire la forme des matrices de E.

Exercice 3. *(5 pt)*
On cherche à résoudre le système suivant :

$$(S) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x + 2y - z = 1 \\ 2x - y + z = 2 \\ x + \alpha y = 3 \end{cases}$$

1) Dans cette partie, $\alpha = 2$.
a) Exprimer (S) sous la forme d'un produit matriciel.
b) Inverser la matrice en question et trouver la solution au système.

2) Essayer de faire de même avec $\alpha = 1$. Expliquer clairement la situation.

Exercice 4. *(5 pt)*
On pose $A = \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ 10 & -7 \end{pmatrix}$.

1) Calculer A^2 et déterminer $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A^2 + \alpha A + \beta I = (0)$.

2) La matrice A est-elle inversible ?

Exercice 5. *(5 pt)*
Déterminer (u_n) et (v_n) en fonction de n avec

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 3v_n \\ v_{n+1} = 2v_n \end{cases} \qquad \text{avec } (u_0, v_0) = (-2, 3)$$

Correction Devoir Surveillé 4

Exercice 1.

A^2, AB, AE, BC, BF, CA, CB, CE, DA, DB, DE, ED, FC .

Exercice 2.

1) Si M est inversible, alors $MK = M \quad \Leftrightarrow \quad M^{-1}MK = M^{-1}M \quad \Leftrightarrow \quad K = I$ ce qui est faux.

2) On calcule

$$KM = \begin{pmatrix} g & h & k \\ d & e & f \\ a & b & c \end{pmatrix} \qquad MK = \begin{pmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ k & h & g \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$$

Comme elles sont toutes égales, on obtient bien $k = g = c = a$, $h = b$ et $f = d$.

Exercice 3.

1) b) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -5 & -4 & 3 \end{pmatrix}$

2) La matrice n'est pas inversible.

Exercice 4.

1) On trouve $A^2 = \begin{pmatrix} 14 & -5 \\ 10 & -1 \end{pmatrix}$ et $(\alpha, \beta) = (-1, -6)$.

2) On a $\dfrac{1}{6}(A - I)A = I$, donc $A^{-1} = \dfrac{1}{6}(A - I)$.