

Les documents ne sont pas autorisés. Les doudoux (y compris portables et calculatrices) sont éteints, rangés dans les sacs, eux-mêmes déposés au fond de la salle ou au pied du tableau. Le barème est indicatif.

**Exercice 1.** (3 pt)

L'été 2024 sera une année exceptionnelle...

... pour les cigales *magicicada* qui vivent dans l'est des USA. Ces cigales sont périodiques. En effet, elles ont un rythme de vie particulier car les larves n'éclosent que tous les 13 ou 17 ans selon celle des deux espèces à laquelle elles appartiennent.

Cette année, les larves des deux espèces éclosent en même temps.

Quand était-ce la dernière fois que cela s'est produit ?

**Exercice 2.** (3 pt)

Trouver tous les couples d'entiers naturels  $(x, y)$  tels que  $x \vee y + 11(x \wedge y) = 203$ .

**Exercice 3.** (8 pt)

On considère l'ensemble  $F = \llbracket 1; 46 \rrbracket$ .

1) Résoudre l'équation de Pell-Fermat  $23x + 47y = 1$ .

2) En déduire qu'il existe un unique entier  $x$  tel que  $23x \equiv 1 \pmod{47}$ .

3) a) Montrer que si  $ab \equiv 0 \pmod{47}$ , alors  $a \equiv 0 \pmod{47}$  ou  $b \equiv 0 \pmod{47}$ . Comment s'appelle cette propriété ?

b) En déduire les congruences de  $a$  si  $a^2 \equiv 1 \pmod{47}$ .

4) a) Montrer que pour tout entier  $p \in F$ , il existe un unique entier  $q \in F$  tel que  $pq \equiv 1 \pmod{47}$ .

On note  $q = \text{inv}(p)$

b) Quels sont les éléments de  $F$  tels que  $p = \text{inv}(p)$  ?

c) Montrer que  $46! \equiv -1 \pmod{47}$ .

**Exercice 4.** (8 pt)

En arrivant à Biscarosse plage, vous avez le choix entre aller sur la plage sud, la plage centrale ou la plage du vivier (au nord). Enfin, ça c'était du temps où il y existait une plage.

Si vous êtes sur la plage sud, vous pouvez décider d'aller à la plage centrale ou rester sur place. Depuis la plage nord, vous pouvez y rester ou aller sur la plage centrale. Et depuis la plage centrale vous pouvez aller au nord, au sud ou ne pas bouger.

On imagine que tous les choix sont équiprobables.

1) Tracer le graphe de la situation.

2) Comment qualifier ce graphe ?

3) Ecrire la matrice  $M$  d'adjacence associée.

4) Comment appelle-t-on ce genre de matrice ?

5) Calculer  $M^2$ .

6) Conjecturer l'expression de  $M^n$ .

7) La prouver.

