Erreurs classiques et rédaction.

- **Le théorème de bijection monotone :**

Exemple : Démontrer que $e^x = x+2$ n'admet qu'une seule solution sur $[0;+\infty[$.

Il faut utiliser la ruse sempiternelle et étudier la fonction $f : x \mapsto e^x - x - 2$, puis chercher ses zéros.

Une étude rapide montre que *f* est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ avec *f*(0)= -1 et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

La fonction *f* est continue, strictement croissante sur $[0;+\infty[$, d'après le théorème de bijection monotone, elle réalise une bijection de $[0;+\infty[$ sur $[-1;+\infty[$ qui contient 0, donc il existe un unique $\alpha \in [0;+\infty[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

- **Intégration :** Avant de calculer, il ne faut pas oublier que celle-ci existe si la fonction intégrée est continue sur l'intervalle considéré. En particulier, pour l'intégration par parties, il ne faut pas oublier de vérifier avant que *u*, *v*, *u'*, et *v'* sont continues.

Exemple : $\int_1^2 t \ln t \, dt$

Intégration par parties :

$$u(t) = \frac{t^2}{2} \Rightarrow u'(t) = t$$

$$v'(t) = \frac{1}{t} \Leftarrow v(t) = \ln(t)$$

car *u* et *v* sont dérivables sur [1 ;2] en tant que fonction de références. Donc elles sont continues sur [1 ;2]

D'autre part, *u'* et *v'* sont aussi continues sur [1 ;2] comme fonctions de référence.

$$\int_1^2 t \ln t \, dt = [(uv)(t)]_1^2 - \int_1^2 (uv')(t) dt$$

$$= \left[\frac{t^2 \ln t}{2}\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{t^2}{2} \times \frac{dt}{t}$$

$$= 2\ln 2 - 0 - \left[\frac{t^2}{4}\right]_1^2 = 2\ln 2 - 1 + \frac{1}{4} = \boxed{2\ln 2 - \frac{3}{4}}$$

- **Rédaction de la récurrence** :

Exemple : Montrer par récurrence que $\sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2$ pour tout entier *n*>0.

Hypothèse de récurrence : (H_n) $\sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2$ *(Ici, Il est hors de question d'écrire « pour tout n », car sinon, il n'y a plus rien à faire, la propriété est vraie tout le temps.)*

Initialisation (ou amorce) : *(On veut montrer que (H_1) est vraie.)* Si *n*=1, on trouve $\sum_{i=1}^{1} (2i-1) = 2-1 = 1 = 1^2$. Donc (H_1) est vraie.

Hérédité : *(On veut montrer que si la propriété (H_p)* est vraie, alors (H_{p+1}) *est vraie.)*

On suppose (H_p) vraie pour *p* fixé. On a alors $\sum_{i=1}^{p} (2i-1) = p^2$. Il faut calculer

$$\sum_{i=1}^{p+1} (2i-1) = \underbrace{\sum_{i=1}^{p} (2i-1)}_{p^2} + (2(p+1)-1)$$

$$= p^2 + 2p + 1 = (p+1)^2$$

Donc (H_{p+1}) est vraie.

Conclusion : La propriété est initialisée au rang 1, elle est héréditaire, donc elle est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

- **Rédaction des équivalences de passage au ln ou à l'exp**…

Exemple 1 : Résoudre $e^{2x+1}=3$.

$e^{2x+1}=3 \Rightarrow \ln(e^{2x+1})=\ln 3$ (*La seule propriété utilisée ici est que la fonction* ln *est justement une fonction. i.e. si* $a=b \Rightarrow f(a)=f(b)$)

$e^{2x+1}=3 \Leftarrow \ln(e^{2x+1})=\ln 3$ (*Là, il faut utiliser la fonction réciproque du* ln, *donc l'*exp, *ou plus précisément que la fonction* ln *est injective, afin d'avoir l'unicité de l'antécédent.*)

Le reste ne pose pas de problème, $2x+1=\ln 3 \Leftrightarrow x=\dfrac{\ln 3-1}{2}$.

On devrait donc écrire :

$$\boxed{e^{2x+1}=3 \Leftrightarrow \ln(e^{2x+1})=\ln 3 \quad (\textit{car } \ln \textit{ est injective sur }]0,+\infty[)}$$

Mais, compte tenu du fait que l'injection n'est pas au programme, il est conseillé d'écrire :

$$\boxed{e^{2x+1}=3 \Leftrightarrow \ln(e^{2x+1})=\ln 3 \quad (\textit{car } \ln \textit{ est bijective de }]0,+\infty[\textit{ dans } \mathbb{R})}$$

Même si c'est trop fort.

Exemple 2 : Résoudre $e^{2x+1}>3$.

$e^{2x+1}>3 \Rightarrow \ln(e^{2x+1})>\ln 3$ (*Ici, il faut utiliser la stricte croissance de la fonction* ln *sur* $]0,+\infty[$)

$e^{2x+1}>3 \Leftarrow \ln(e^{2x+1})>\ln 3$ (*Il s'agit là encore de la fonction réciproque du* ln, *donc l'*exp. *Il faut donc écrire : par stricte croissance de* exp *sur* $\mathbb{R}$. *On peut aussi utiliser un raisonnement par l'absurde en utilisant la croissance de ln*)

Voici ce que je propose comme rédaction :

$$\boxed{\begin{array}{l} e^{2x+1}>3 \Leftrightarrow \ln(e^{2x+1})>\ln 3 \quad (\Rightarrow \ \text{par la stricte croissance de la fonction } \ln \text{ sur }]0,+\infty[) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad (\Leftarrow \ \text{par stricte croissance de exp sur } \mathbb{R}) \end{array}}$$

Je vous laisse l'adaptation dans le cas d'un passage à l'exponentiel.

- **Résolution d'une équation différentielle :**

Exemple : Résoudre $y'=2y-e^x$

- On commence par résoudre <u>l'équation homogène</u> : $y'=2y$.

  Les solutions sont du type $y_1=\lambda e^{2x}$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$.
- Puis il faut trouver une <u>solution particulière</u> de l'équation de départ. *(Là, c'est le domaine de la bidouille, appelée aussi expérimentation par les spécialistes. Pensez aux constantes, ce serait dommage de passer à côté d'une solution si simple.)*. On remarque que $y_2=e^x$ est une solution de l'équation.
- Conclusion : D'où les solutions de l'équation cherchées : $\boxed{y=y_1+y_2=\lambda e^{2x}+e^x \quad \text{avec} \quad \lambda\in\mathbb{R}}$ (*on n'oubliera pas de répéter* $\lambda\in\mathbb{R}$!!)

D'autre part, il est peut-être bon de rappeler que ce procédé magique donne toutes les solutions de l'équation. En effet, tout repose sur le fait (difficile mais démontré en cours) que les solutions de l'équation homogènes sont toutes de la forme $y_1=\lambda e^{2x}$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$. Il convient de ne pas oublier le principe : Si z est une solution de l'équation de départ, alors on a

$$\left.\begin{array}{l} y'=2y+e^x \\ z'=2z+e^x \end{array}\right\} \Rightarrow z'-y'=2(z-y) \Leftrightarrow (z-y)'=2(z-y)$$

Donc $z-y$ est solution de l'équation homogène et s'écrit $z-y=\lambda' e^{2x}$ avec $\lambda'\in\mathbb{R}$. D'où $z=y+\lambda' e^{2x}=(\lambda+\lambda')e^{2x}+e^x$ qui est bien de la forme trouvée précédemment.

N.B. : Si l'on donne de plus une condition initiale du type $y(0)=1$, le théorème de Cauchy-Lipschitz dit alors qu'il n'existe qu'une seule fonction qui répond à la question. (*souvenez-vous, il n'y a qu'une seule fonction dans le drapé différentiel car deux solutions ne peuvent pas se couper. Pensez à l'étude d'un phénomène physique qui aurait plusieurs alternatives d'évolution à partir d'un état initial donné. Absurde !)*

- **Schéma de Bernoulli et loi binomiale :**

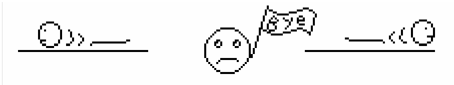
<u>Exemple</u> : Sachant que 99% des élèves de terminale d'Eiffel ont leur Baccalauréat S, calculer la probabilité qu'au moins deux élèves d'une classe de 36 élèves n'aient pas leur Bac.

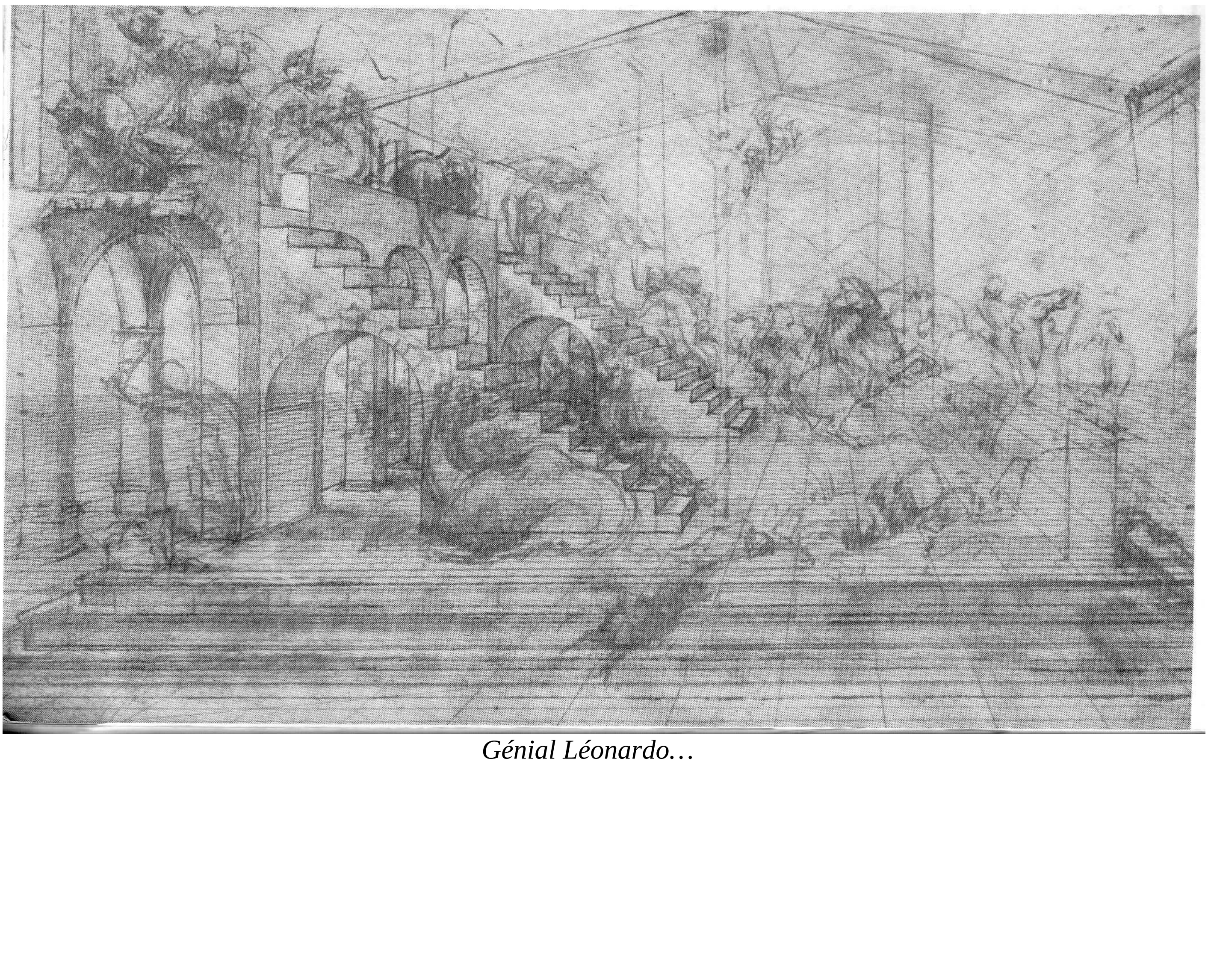
L'expérience aléatoire (?!) du passage du bac pour un élève suit une <u>loi de Bernoulli</u> avec probabilité de succès de p=0,99 et d'échec de 1-p=0,01. Soit X la variable aléatoire du nombre de reçus parmi les 36 élèves de la classe. On considère que l'expérience se reproduit pour chaque élève de façon <u>indépendante avec la même probabilité de succès</u>. Ainsi, <u>X suit une loi Binomiale de paramètre (36 ;0,99).</u>
On a alors

$$p(\mathrm{X}\le 34)=1-p\left(X>34\right)=1-\binom{36}{35}p^{35}(1-p)^{1}-\binom{36}{36}p^{36}(1-p)^{0}=1-36p^{35}(1-p)^{1}-p^{36}\simeq 0,05$$

(Vous voila rassuré s'il y a dans la classe au moins un élève moins fort que vous…)
N.B. : Si la question porte sur au moins 1 (ou au plus 1), il vaut mieux penser complémentaire, c'est plus rapide.

- **Géométrie: Des idées reçues :**
  - Deux droites orthogonales à une même troisième ne sont pas nécessairement parallèles.
  - L'isobarycentre de trois points de l'espace est à égale distance de ces trois points.
  - Si une droite est sécante à deux droites d'un plan, alors, elle est orthogonale au plan. (Pour qu'une droite soit orthogonale à un plan, il faut qu'elle soit orthogonale à deux droites <u>sécantes</u> dudit plan.)





Génial Léonardo…