Exercice 1: En vrac :

1. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a $\sum_{k=1}^{n} k.k! = (n+1)! - 1$.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, les nombres $2k+1$ et $9k+4$ sot premiers entre eux.
3. Déterminer $p \in \mathbb{Z}$ tel que $p-1 | p+11$.
4. Dans la division euclidienne de a par b, le quotient est 4 et le reste r. Déterminer a,b et r sachant que $a+b+r=79$.
5. Quel est le reste de la division euclidienne de 4^{2005} par 7 ?
6. Les nombres a et b sont des entiers. Montrer que $a^2 + b^2$ est divisible par 3 si et seulement si a et b le sont.
7. Les nombres a et b sont des entiers. Montrer que $a^2 - b^2$ est divisible par 8.

Exercice 2: On pose E l'ensemble des entiers naturels s'écrivant $9 + a^2$ avec $a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On se propose d'étudier l'existence d'éléments de E qui sont des puissances de 2,3 ou 5.

1. Etude de l'équation d'inconnue a : $a^2 + 9 = 2^n$ où $a \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$.
   a) Montrer que si a existe, alors a est impair.
   b) En raisonnant modulo 4, montrer que l'équation proposée n'a pas de solution.
2. Etude de l'équation d'inconnue a : $a^2 + 9 = 3^n$ où $a \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.
   a) Montrer que si $n \geq 3$, alors $3^n \equiv 1(4)$ ou $3^n \equiv 3(4)$.
   b) Montrer que si a existe, alors a est pair et en déduire que, nécessairement, n est pair.
   c) On pose $n=2p$ où p est un entier naturel, $p \geq 2$. Factoriser $3^n - a^2$ et en déduire que l'équation posée n'a pas de solution.
3. Etude de l'équation d'inconnue a : $a^2 + 9 = 5^n$ où $a \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
   a) En raisonnant modulo 3, montrer que l'équation est sans solution si n est impair.
   b) En posant $n=2p$, montrer qu'il n'existe qu'une seule solution à l'équation proposée.

Exercice 3: 1. a) Déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel non nul n le reste dans la division euclidienne par 9 de 7^n.

b) Démontrer alors que $2005^{2005} \equiv 7\ (9)$.

2. a) Démontrer que pour tout entier naturel non nul n, on a $10^n \equiv 1\ (9)$.

b) On désigne par m un entier naturel écrit en base dix, on appelle s la somme de ses chiffres. Démontrer que $m \equiv s\ (9)$.

c) En déduire que m est divisible par 9 si et seulement si s est divisible par 9.

3. On suppose que $a = 2005^{2005}$, on désigne par b la somme des chiffres de a, par c la somme des chiffres de b et par d la somme des chiffres de c.

a) Démontrer que $a \equiv d\ (9)$.

b) Sachant que $2005<10000$, démontrer que a s'écrit en numération décimale avec au plus 8020 chiffres. En déduire que $b \leq 72180$.

c) Démonter que $c \leq 45$.

d) En étudiant la liste des entiers inférieurs à 45, déterminer un majorant de d plus petit que 15.

e) Démontrer que $d=7$.

Exercice 4: Sur les billets de banque en euros figure un code de 11 chiffres précédé d'une lettre. On remplace la lettre par son rang dans l'alphabet habituel comportant 26 lettres. On obtient ainsi un nombre à 12 ou 13 chiffres et on cherche le reste de la division de ce nombre par 9. Ce reste est le même pour tous les billets authentiques et vaut 8.

Exemple :

Code : s00212913862.
Rang dans l'alphabet de la lettre s : 19.
Nombre obtenu : 1900212913862.
Reste pour ce billet : 8.

1. Le code u01308937097 figure sur un billet de banque.
   a) Donner le nombre à 13 chiffres correspondant à ce code.
   b) Calculer le reste de la division par 9 de la somme des 13 chiffres de ce nombre.
   c) Que peut-on dire de ce billet ?

2. Sur un billet authentique figure le code sO21664481Ox, x pour le dernier chiffre illisible.
Montrer que $x + 42$ est congru à 8 modulo 9.
En déduire x.

3. Sur un autre billet authentique la partie du code formé par les 11 chiffres est 16122340242, mais la lettre qui les précède est effacée. On appelle n le rang dans l'alphabet de la lettre effacée.
   a) Déterminer les valeurs possibles de n.
   b) Quelles sont les possibilités pour la lettre effacée ?