Exercice 1 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. On fera une figure, à l'échelle 3cm pour l'unité, sur laquelle apparaîtront les différents points et lieux géométriques des prolégomènes et de la partie A. On laissera notamment les traits de construction (règle et compas) utilisés pour placer le point A.

Prolégomènes : Les points A, B, A' et B' ont pour affixes respectives $i-\sqrt{3}$, i, 0 et $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$.

On considère $f : z \mapsto az+b$ l'expression de la similitude directe telle que A ait pour image A', et B ait pour image B'. Déterminer a et b.

Partie A : Dans cette partie, σ désigne la similitude ayant pour expression $f : z' \mapsto \alpha z+\omega(1-\alpha)$ avec $\alpha=\frac{1}{2}+\frac{i}{2\sqrt{3}}$ et $\omega=\sqrt{3}+i$. On note $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1 et $\mathcal{C}'$ son image par σ.

1. Montrer que σ est une similitude d'angle $\frac{\pi}{6}$, de rapport $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et de centre Ω d'affixe ω.
2. Déterminer l'image de la droite $(\mathrm{A}\Omega)$ par la similitude et en déduire que $\mathcal{C}'$ est tangent à $(\mathrm{O}\Omega)$.
3. Déterminer le centre I et le rayon r de $\mathcal{C}'$.
4. En déduire la nature de $\mathrm{O}\Omega\mathrm{I}$.

Partie B : On s'intéresse ici à la suite $z_{n+1}=f^5(z_n)$ $\left(n\in\mathbb{N}\right)$ avec $z_0=e^{\frac{i\pi}{3}}+\omega$ où f est l'expression de σ, la similitude étudiée dans la partie précédente et $f^5=f\circ f\circ f\circ f\circ f$. On pose $Z_n=z_n-\omega$.

1. Montrer que $Z_n=Z_0\alpha^{5n}$.
2. En déduire l'expression de Z_n en fonction de n.
3. Prouver que Z_n est réel positif si et seulement si $2+5n\equiv 0\ (12)$.
4. Résoudre l'équation $12p+5q=2$ si p et q sont des entiers relatifs.
5. Conclure en donnant l'expression générale des entiers naturels n pour lesquels Z_n est réel positif et, en déduire dans ce cas, où se trouvent les points d'affixe z_n.

Correction de l’exercice de spécialité :

Prolégomènes : On doit donc résoudre le système linéaire à deux équations et deux inconnues :

$$\begin{cases} f(i-\sqrt{3})=0 \\ f(i)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{i}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(i-\sqrt{3})+b=0 \\ ai+b=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{i}{2} \end{cases}$$

ce qui donne en posant a=x+iy et b=x'+iy',

$$\begin{cases} (x+iy)(i-\sqrt{3})+(x'+iy')=0 \\ (x+iy)i+(x'+iy')=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{i}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-\sqrt{3}y+y'=0 \quad (L_1) \\ -\sqrt{3}x-y+x'=0 \quad (L_2) \\ x+y'=\dfrac{1}{2} \quad (L_3) \\ -y+x'=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \quad (L_4) \end{cases}$$

En substituant L_3 à L_1 on obtient $y=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$, ce qui donne, via L_4, $x'=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2\sqrt{3}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Avec L_2, on trouve $\sqrt{3}x=\dfrac{2}{\sqrt{3}}-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x=\dfrac{1}{2}$, puis, par L_3, $y'=0$. D’où, au final,

$$\boxed{a=\frac{1}{2}+\frac{i}{2\sqrt{3}}} \text{ et } \boxed{b=\frac{2}{\sqrt{3}}}.$$

Partie A : 1. Le rapport k et l’angle θ de la similitude sont, respectivement, le module et l’argument de α. Or $\alpha=\dfrac{1}{2}+\dfrac{i}{2\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{6}}$, donc $\boxed{k=|\alpha|=\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$ et $\boxed{\arg(\alpha)\equiv\dfrac{\pi}{6} \quad (2\pi)}$. Pour le centre de la similitude, il faut déterminer le point invariant ; on cherche donc le complexe z tel que $f(z)=z$.

Mais $z'=f(z)=\alpha z+\omega(1-\alpha) \Rightarrow z'-\omega=\alpha(z-\omega)$.

Donc l’affixe du centre de similitude est ω.

2. On a $\sigma(\mathrm{A})=\mathrm{A}'$ et $\sigma(\Omega)=\Omega$; l’image d’une droite par une similitude étant une droite, l’image de $(\mathrm{A}\Omega)$ est $(\mathrm{A}'\Omega)$ qui s’écrit encore $(\mathrm{O}\Omega)$.

Par conservation de l’orthogonalité, en considérant le rayon [OB] du cercle $\mathcal{C}$ qui est tangent à $(\mathrm{A}\Omega)$ en B, on trouve que $\mathcal{C}'$ est tangent à $(\mathrm{O}\Omega)$ en B’.

3. Le centre I est l’image de O, son affixe est donc $\boxed{f(0)=\dfrac{2}{\sqrt{3}}}$ et le rayon est

$\boxed{r=k\times\mathrm{OA}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$.

4. Le plus rapide est de calculer $\left(\overrightarrow{\mathrm{OI}},\overrightarrow{\mathrm{O}\Omega}\right)=\arg\left(\dfrac{\sqrt{3}+i-0}{\dfrac{2}{\sqrt{3}}-0}\right)=\arg\left(\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}\right)=\dfrac{\pi}{6} \quad (2\pi)$, car

comme $\sigma(\mathrm{O})=\mathrm{I}$, on a $\left(\overrightarrow{\Omega\mathrm{O}},\overrightarrow{\Omega\mathrm{I}}\right)=\dfrac{\pi}{6} \quad (2\pi)$. Donc $\mathrm{O}\Omega\mathrm{I}$ est isocèle de sommet principal I.

(Remarque : On peut aussi calculer la distance $I\Omega$, mais il faut alors déterminer si le triangle est rectangle ou équilatéral).

Partie B : 1. On commence par calculer z_{n+1} en fonction de z_n :

$$z_{n+1} = f^5(z_n) = f \circ f^4(z_n) = \alpha f^4(z_n) + \omega(1-\alpha) \Rightarrow z_{n+1} - \omega = \alpha(f^4(z_n) - \omega)$$

D'où
$$\begin{aligned} Z_{n+1} &= \alpha(f^4(z_n) - \omega) \\ &= \alpha\left[\alpha f^3(z_n) + \omega(1-\alpha) - \omega\right] \\ &= \alpha^2(f^3(z_n) - \omega) \\ &= \alpha^2\left[\alpha f^2(z_n) + \omega(1-\alpha) - \omega\right] \\ &= \alpha^3(f^2(z_n) - \omega) \\ &= \alpha^3\left[\alpha f(z_n) + \omega(1-\alpha) - \omega\right] \\ &= \alpha^4(f(z_n) - \omega) \\ &= \alpha^5(z_n - \omega) \\ &= \alpha^5 Z_n \end{aligned}$$

Remarque : On aurait pu faire aussi une récurrence forte, mais, avec cinq étapes, est-ce bien nécessaire ?

Ainsi, (Z_n) est une suite géométrique de raison α^5 et de premier terme Z_0, donc

$$\boxed{Z_n = (\alpha^5)^n Z_0 = \alpha^{5n} Z_0}.$$

2. On sait que $\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}} e^{i\frac{5\pi}{6}}$ et $Z_0 = z_0 - \omega = e^{i\frac{\pi}{3}}$. D'après ce qui précède,

$$Z_n = \alpha^{5n} Z_0 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{5n} e^{i\frac{\pi}{3}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{5n} e^{i\frac{5n\pi}{6} + i\frac{\pi}{3}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{5n} e^{i\frac{(5n+2)\pi}{6}}.$$

3. De la question précédente, on tire que Z_n est un réel si et seulement si $\dfrac{(5n+2)\pi}{6} \equiv 0\ (\pi)$. Mais si l'on veut un réel positif, il faut et il suffit que $\dfrac{(5n+2)\pi}{6} \equiv 0\ (2\pi)$ ce qui donne après simplifications : $5n + 2 \equiv 0\ (12)$.

4. On a $12 \wedge 5 = 1$ et d'après la relation de Bézout, il existe *u* et *v* entiers relatifs tels que 12*u*+5*v*=1. On détermine ces deux entiers via l'algorithme d'Euclide :

$$\left.\begin{aligned} 12 &= 5\times 2 + 2 \\ 5 &= 2\times 2 + 1 \end{aligned}\right\} \text{ d'où } 12\times 2 = 5\times 4 + (5-1) \Rightarrow \underbrace{-2}_{u}\times 12 + \underbrace{5}_{v}\times 5 = 1$$

On a donc une solution particulière de l'équation $12p + 5q = 2$ qui est $-4\times 12 + 10\times 5 = 2$, et , en soustrayant membre à membre, on obtient : $12(p+4) = 5(10-q)$ (*). D'après le lemme de Gauss, on en déduit que 5 divise (*p*+4) puisqu'il est premier avec 12, et, mutatis mutandis, 12 divise (10-*q*). Ainsi, il existe *k* et *k'* entiers relatifs tels que $5k = p + 4$ et $12k' = 10 - q$. En substituant ces deux dernières égalités dans (*), on trouve *k*=*k'*. On en conclut que $(p,q) = (5k-4, 10-12k)$ est une solution de l'équation.

Réciproquement, si $(p,q) = (5k-4, 10-12k)$, on a bien $12(5k-4) + 5(10-12k) = 2$ pour tout entier relatif *k*.

Conclusion : $\boxed{(p,q) \in \{(5k-4, 10-12k), k \in \mathbb{Z}\}}$

5. On a vu (question B.3) que Z_n est un réel positif si et seulement si $5n+2 \equiv 0\ (12)$, ce qui revient à l'existence d'un entier relatif *m* tel que $5n+2=12m$
En identifiant avec $12p+5q=2$, on trouve *n*= -*q*, d'où <u>*n*=12*k*-10 avec *k* entier relatif.</u>
Dire que Z_n est un réel positif revient à dire qu'il est l'affixe d'un point de la demi-droite $(O;\vec{u})$. On cherche où se trouvent les points d'affixes $z_n = Z_n + \omega$. On est donc amené à considérer la translation de vecteur $\vec{w}$ d'affixe ω. L'expression de cette translation est $z \mapsto z+\omega$, donc l'image de Z_n est z_n. Or l'image de la demi-droite $(O;\vec{u})$ par cette translation est la demi-droite $(\Omega;\vec{u})$.
En conclusion, les points d'affixes z_n pour *n*=12*k*-10 sont sur la demi-droite $(\Omega;\vec{u})$.