EXERCICES

Pour les exercices **23** à **33**, donnez une primitive de la fonction f sur l'intervalle I indiqué.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 7, page 203.

23 **a)** $f(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 - 4x + 3$; $I = \mathbb{R}$.

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{3}$; $I = \mathbb{R}$.

c) $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$; $I =]0 ; +\infty[$.

24 **a)** $f(x) = \dfrac{2}{x^3}$; $I =]0 ; +\infty[$.

b) $f(x) = \dfrac{-3}{x^2}$; $I =]-\infty ; 0[$.

c) $f(x) = -\dfrac{1}{x^3} + \dfrac{4}{x^2} - 1$; $I =]0 ; +\infty[$.

25 **a)** $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{2x+1}}$; $I = \left]-\dfrac{1}{2} ; +\infty\right[$.

b) $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2-1}}$; $I =]1 ; +\infty[$.

c) $f(x) = \dfrac{2x+5}{\sqrt{-x^2-5x+6}} - 1$; $I =]-6 ; 1[$.

26 **a)** $f(x) = \dfrac{1}{3\sqrt{x}} + \dfrac{4}{3x^2} - \sqrt{2}$; $I =]0 ; +\infty[$.

b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$; $I =]1 ; +\infty[$.

c) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1-x}} - 1$; $I =]-\infty ; 1[$.

27 **a)** $f(x) = (x+2)^3$; $I = \mathbb{R}$.

b) $f(x) = \dfrac{(x-1)^5}{3}$; $I = \mathbb{R}$.

c) $f(x) = (2x-1)^3$; $I = \mathbb{R}$.

d) $f(x) = 2(3x-1)^5$; $I = \mathbb{R}$.

28 **a)** $f(x) = 2x(1+x^2)^7$; $I = \mathbb{R}$.

b) $f(x) = \dfrac{2}{(x+4)^3}$; $I =]-4 ; +\infty[$.

c) $f(x) = \dfrac{1}{(3x-1)^2}$; $I = \left]-\infty ; \dfrac{1}{3}\right[$.

29 **a)** $f(x) = \dfrac{2x-1}{(x^2-x+3)^2}$; $I = \mathbb{R}$.

b) $f(x) = \dfrac{x-1}{(x^2-2x-3)^2}$; $I =]-1 ; 3[$.

c) $f(x) = \dfrac{4x^2}{(x^3+8)^3}$; $I =]-2 ; +\infty[$.

30 **a)** $f(x) = \cos(3x) + \sin(2x)$; $I = \mathbb{R}$.

b) $f(x) = 3\cos x - 2\sin(2x) + 1$; $I = \mathbb{R}$.

c) $f(x) = \sin\left(\dfrac{\pi}{3} - 2x\right)$; $I = \mathbb{R}$.

31 **a)** $f(x) = \sin x \cos x$; $I = \mathbb{R}$.

b) $f(x) = \cos x(\sin^2 x - 3\sin x + 8)$; $I = \mathbb{R}$.

c) $f(x) = \dfrac{2}{\cos^2 x} - 1$; $I = \left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right[$.

32 **a)** $f(x) = \dfrac{1}{x-4}$; $I =]4 ; +\infty[$.

b) $f(x) = \dfrac{1}{x-4}$; $I =]-\infty ; 4[$.

c) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-x}$; $I =]0 ; 1[$.

☞ **Aide.** Pensez à examiner le signe du dénominateur.

33 **a)** $f(x) = e^{-x+1}$; $I = \mathbb{R}$.

b) $f(x) = 2e^{3x-2}$; $I = \mathbb{R}$.

c) $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$; $I = \mathbb{R}$.

d) $f(x) = \sin x \times e^{\cos x}$; $I = \mathbb{R}$.

Pour les exercices **34** à **36**, trouvez la primitive F de la fonction f qui vérifie la condition donnée sur un intervalle I à préciser.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 6, page 201.

34 **a)** $f(x) = x^4 + 3x^2 - 4x + 1$; $F(2) = 0$.

b) $f(x) = \dfrac{2}{x^2} + x$; $F(1) = 0$.

c) $f(x) = \dfrac{1}{(2x+1)^2}$; $F(0) = 0$.

35 **a)** $f(x) = \sin\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right)$; $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.

b) $f(x) = \cos x \sin^2 x$; $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.

c) $f(x) = 2\cos\dfrac{x}{2} - 3\sin\dfrac{x}{2}$; $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.

36 **a)** $f(x) = \dfrac{2}{(2x+1)^2}$; $F(-1) = 0$.

b) $f(x) = \dfrac{-1}{3-x}$; $F(1) = 1$.

c) $f(x) = \dfrac{x}{(x^2-1)^2}$; $F(0) = 0$.

37 Trouvez la primitive F, sur un intervalle I à préciser, de la fonction f telle que la courbe $\mathscr{C}_F$ passe par le point A indiqué.

a) $f(x) = e^{3x+1}$; $A(-1 ; 0)$.

b) $f(x) = xe^{-x^2}$; $A(\sqrt{\ln 2} ; 1)$.

c) $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1}$; $A(2 ; 0)$.

6. Calculs d'intégrales

Pour les exercices **38** à **43**, calculez les intégrales indiquées à l'aide d'une primitive.

38 **a)** $I = \int_0^4 (x-3)\,dx$. **b)** $I = \int_2^{-1} (t^2 - 4t + 3)\,dt$.

c) $I = \int_1^2 \left(t^2 + t - \dfrac{1}{t}\right) dt$. **d)** $I = \int_1^4 \left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x}\right) dx$.

39 **a)** $I = \int_0^1 (2x+1)(x^2+x+1)\,dx$. **b)** $I = \int_1^9 \frac{dt}{\sqrt{t}}$.

c) $I = \int_0^2 \frac{3x}{(x^2+1)^2}\,dx$. **d)** $I = \int_{\ln 2}^{\ln 3} e^x\,dx$.

40 **a)** $I = \int_0^1 (x-2)(x^2-4x+1)^5\,dx$.

b) $I = \int_0^5 \frac{dt}{\sqrt{1+t}}$. **c)** $I = \int_1^2 \frac{t^5}{t^4+2}\,dt$.

41 **a)** $I = \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{5-x}}$. **b)** $I = \int_0^3 \frac{dt}{(2t+1)^2}$.

c) $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,dt$. **d)** $I = \int_0^{\pi} \sin(2t)\,dt$.

42 **a)** $I = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{2x+5}}\,dx$. **b)** $I = \int_0^{\pi} \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx$.

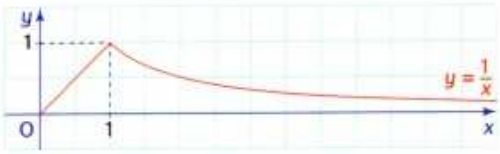
c) $I = \int_{-2}^{-1} \frac{x-3}{x}\,dx$. **d)** $I = \int_{-1}^{1} \frac{x}{x^2-4}\,dx$.

43 **a)** $I = \int_1^2 \frac{1}{3x+2}\,dx$. **b)** $I = \int_0^1 5e^{3x}\,dx$.

c) $I = \int_{-1}^{1} e^{3t+4}\,dt$. **d)** $I = \int_0^1 t e^{t^2-1}\,dt$.

44 La fonction f est représentée par la courbe ci-dessous. Utilisez la relation de Chasles pour calculer les intégrales :

$$I = \int_0^3 f(t)\,dt \quad \text{et} \quad J = \int_2^{\frac{1}{2}} f(t)\,dt.$$



45 Calculez l'intégrale en utilisant les propriétés de l'intégration (relation de Chasles, linéarité).

a) $I = \int_1^e \ln t\,dt + \int_1^e \left(t + \ln\frac{1}{t}\right)dt$.

b) $J = \int_1^e \ln(1+t^2)\,dt + \int_e^1 \ln(1+t^2)\,dt$.

c) $K = \int_1^{\frac{\pi}{6}} \cos 2t\,dt - \int_1^{\frac{7\pi}{6}} \cos 2t\,dt$.

46 **1.** Trouvez deux réels a et b tels que, pour tout réel x dans $\mathbb{R} - \{-3\,;3\}$, $\frac{1}{x^2-9} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x+3}$.

2. Déduisez-en $I = \int_4^5 \frac{1}{x^2-9}\,dx$.

47 **1.** Trouvez trois réels a, b, c tels que, pour tout réel x dans $\mathbb{R} - \{-3\}$, $\frac{4x^2-5x+1}{x+3} = ax + b + \frac{c}{x+3}$.

2. Déduisez-en $I = \int_2^0 \frac{4x^2-5x+1}{x+3}\,dx$.

48 **1.** Trouvez trois réels a, b, c tels que, pour tout réel x dans $\mathbb{R} - \{1\}$, $\frac{x^2}{(x-1)^2} = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$.

2. Déduisez-en $I = \int_{-3}^0 \frac{x^2}{(x-1)^2}\,dx$.

49 **1.** Prouvez que pour tout réel x,

$$\frac{1}{1+e^x} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}.$$

2. Déduisez-en $I = \int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\,dx$.

50 **ZOOM SUR... le théorème 9**

1. À quoi sert l'hypothèse « u et v sont dérivables sur l'intervalle I d'intégration et u' et v' sont continues sur cet intervalle » ?

2. f est la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ $f(0) = 0$ et pour tout $t > 0$, $f(t) = t\ln t$. La fonction f est dérivable donc continue sur $]0\,;+\infty[$ et puisque $\lim\limits_{t\to 0} t\ln t = 0 = f(0)$, f est aussi continue en 0. Donc f est continue sur $[0\,;+\infty[$ et l'intégrale $\int_0^1 t\ln t\,dt$ existe.

a) Pourquoi ne peut-on pas utiliser le théorème 9 pour calculer cette intégrale ?

b) Pourquoi peut-on utiliser ce théorème pour calculer $\int_{\alpha}^1 t\ln t\,dt$ pour tout réel $\alpha > 0$?

Pour les exercices 51 à 54, calculez les intégrales I et J à l'aide d'une intégration par parties.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 8, page 205.

51 **a)** $I = \int_1^e x\ln x\,dx$. **b)** $J = \int_1^{e^2} \ln t\,dt$.

52 **a)** $I = \int_0^{\pi} (x-1)\cos x\,dx$. **b)** $J = \int_0^1 (x+2)e^x\,dx$.

53 **a)** $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} 3x\sin(3x)\,dx$. **b)** $J = \int_0^1 (2x+1)e^{-x}\,dx$.

54 **a)** $I = \int_1^2 (t-2)e^{2t}\,dt$. **b)** $J = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$.

☞ **Aide.** Pour J, prenez une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x+1}}$.

Pour les exercices 55 à 58, f est une fonction continue sur l'intervalle I contenant le réel a. Trouvez à l'aide d'une intégration par parties, la primitive F de f sur I telle que $F(a) = 0$.

☞ **Aide.** Voir l'exercice résolu 9, page 205.

55 $I = \mathbb{R}$; $a = \pi$; $f(t) = t\cos t$.

56 $I =]0\,;+\infty[$; $a = 1$; $f(t) = t^2\ln t$.

57 $I =]0\,;+\infty[$; $a = 1$; $f(t) = \frac{\ln t}{t^2}$.

58 $I = \mathbb{R}$; $a = 0$; $f(t) = 2te^{-\frac{t}{2}}$.

Pour progresser

Calcul de primitives

Pour les exercices 62 à 67, trouvez une primitive de la fonction f sur l'intervalle indiqué par les méthodes usuelles.

62 **a)** $f : x \mapsto (x+1)(x^2+2x-1)^4$; $I = \mathbb{R}$.

b) $f : x \mapsto \dfrac{1-2x}{(2x^2-2x+1)^3}$; $I = \mathbb{R}$.

c) $f : x \mapsto \dfrac{1-x}{\sqrt{x^2-2x+2}}$; $I = \mathbb{R}$.

d) $f : x \mapsto (-2x+1)^5$; $I = \mathbb{R}$.

63 **a)** $f : x \mapsto \dfrac{2}{3x+1}$; $I = \left]-\dfrac{1}{3} ; +\infty\right[$.

b) $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{x^3-1}$; $I =]1 ; +\infty[$.

c) $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{x^3-1}$; $I =]-\infty ; 1[$.

d) $f : x \mapsto \dfrac{\cos x}{\sin x}$; $I =]-\pi ; 0[$.

64 **a)** $f : x \mapsto e^{2x+1}$; $I = \mathbb{R}$.

b) $f : x \mapsto 2e^{-3x+2}$; $I = \mathbb{R}$.

c) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2} e^{-\frac{2}{x}}$; $I =]0 ; +\infty[$.

d) $f : x \mapsto \dfrac{1}{(x+1)^2} e^{\frac{2x+1}{x+1}}$; $I =]-1 ; +\infty[$.

65 • **a)** $f : x \mapsto \sin x + x\cos x$; $I = \mathbb{R}$.

b) $f : x \mapsto \dfrac{\sin x - x\cos x}{x^2}$; $I =]0 ; +\infty[$.

c) $f : x \mapsto \dfrac{\ln x - 1}{x^2}$; $I =]0 ; +\infty[$.

d) $f : x \mapsto \sqrt{x+1} + \dfrac{x}{2\sqrt{x+1}}$; $I =]-1 ; +\infty[$.

Aide. Pensez aux formules de dérivation d'un produit ou d'un quotient.

66 • **a)** $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$; $I =]0 ; +\infty[$.

b) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x\ln x}$; $I =]1 ; +\infty[$.

c) $f : x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$; $I = \mathbb{R}$.

67 • **a)** $f : x \mapsto \tan x + \tan^3 x$; $I = \left]-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right[$.

b) $f : x \mapsto \tan^2 x$; $I = \left]-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right[$.

c) $f : x \mapsto 1 + \dfrac{1}{\tan^2 x}$; $I = \left]0 ; \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Aide. La dérivée de la fonction $x \mapsto \tan x$ est la fonction $x \mapsto 1 + \tan^2 x$.

68 • **BAC** u et v sont les fonctions définies sur $I = \left[0 ; \dfrac{\pi}{4}\right]$ par $u(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$ et $v(x) = \dfrac{1}{\cos^4 x}$.

1. Vérifiez que pour tout x de I, $u'(x) = \dfrac{3}{\cos^4 x} - \dfrac{2}{\cos^2 x}$.

2. Trouvez la primitive de v, sur I, nulle en 0.

Aide. La dérivée de la fonction $x \mapsto \tan x$ est la fonction $x \mapsto 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Pour les exercices 69 à 78, f désigne une fonction rationnelle définie sur un intervalle I. Le cas échéant, prouvez que $f(x)$ s'écrit sous la forme indiquée, puis trouvez une primitive de f sur I.

69 $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$; $I =]1 ; +\infty[$.

Écrivez $f(x)$ sous la forme $a + \dfrac{b}{x-1}$.

70 $f(x) = \dfrac{4x+5}{2x+1}$; $I = \left]-\infty ; -\dfrac{1}{2}\right[$.

Écrivez $f(x)$ sous la forme $a + \dfrac{b}{2x+1}$.

Aide. Pensez au signe de $2x+1$ sur l'intervalle I.

71 $f(x) = \dfrac{2x^2-3x-4}{x-2}$; $I =]2 ; +\infty[$.

Écrivez $f(x)$ sous la forme $ax + b + \dfrac{c}{x-2}$.

72 $f(x) = \dfrac{1}{x-3} + \dfrac{1}{x+3}$.

a) $I =]3 ; +\infty[$. **b)** $I =]-3 ; 3[$. **c)** $I =]-\infty ; -3[$.

Aide. Pensez aux signes des dénominateurs sur l'intervalle I.

73 $f(x) = \dfrac{(x+3)^2}{(x+2)^2}$; $I =]-\infty ; -2[$.

Écrivez $f(x)$ sous la forme $a + \dfrac{b}{x+2} + \dfrac{c}{(x+2)^2}$.

74 $f(x) = \dfrac{2x^3+13x^2+24x+2}{(x+3)^2}$; $I =]-3 ; +\infty[$.

Écrivez $f(x)$ sous la forme $ax + b + \dfrac{c}{(x+3)^2}$.

75 • $f(x) = \dfrac{8x^2-4}{4x^2-1}$; $I = \left]-\dfrac{1}{2} ; \dfrac{1}{2}\right[$.

Écrivez $f(x)$ sous la forme $a + \dfrac{b}{2x+1} + \dfrac{c}{2x-1}$.

76 • $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{(x^2-1)^2}$; $I =]1 ; +\infty[$.

Écrivez $f(x)$ sous la forme $\dfrac{a}{(x-1)^2} + \dfrac{b}{(x+1)^2}$.

77 • $f(x) = \dfrac{x^3+3x}{(x^2-1)^3}$; $I =]1\,;+\infty[$.

Écrivez $f(x)$ sous la forme $\dfrac{a}{(x-1)^3} + \dfrac{b}{(x+1)^3}$.

78 • $f(x) = \dfrac{x+2}{(x+1)^4}$; $I =]-\infty\,;-1[$.

Écrivez $f(x)$ sous la forme $\dfrac{a}{(x+1)^3} + \dfrac{b}{(x+1)^4}$.

Pour les exercices 79 à 82, f désigne une fonction trigonométrique définie sur $\mathbb{R}$.

79 $f(x) = \cos^3 x$. Vérifiez que $f(x) = \cos x - \cos x \sin^2 x$. Trouvez une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

80 $f(x) = \sin x + \sin^3 x$.
Vérifiez que $f(x) = 2\sin x - \sin x \cos^2 x$. Trouvez une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

81 $f(x) = \sin^3 x \cos^2 x$. Trouvez des réels a et b tels que pour tout réel x, $f(x) = \sin x(a\cos^2 x + b\cos^4 x)$.
Déduisez-en une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

82 • $f(x) = \sin^4 x \cos^5 x$; en remarquant que $f(x) = \cos x(\sin^4 x \cos^4 x)$, écrivez $f(x)$ sous la forme $f(x) = \cos x(a\sin^4 x + b\sin^6 x + c\sin^8 x)$.
Déduisez-en une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

Pour les exercices 83 à 85, f désigne une fonction trigonométrique définie sur $\mathbb{R}$.
Linéarisez $f(x)$ (voir TD 3, chapitre 12, page 332) puis indiquez une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

83 $f(x) = \sin^4 x$.

84 $f(x) = \cos^4 x$.

85 • $f(x) = \sin^2 x \cos^4 x$.

Commentaire. **Une primitive F sur $\mathbb{R}$ d'une fonction f du type $x \mapsto a\cos^n x \sin^p x$ (a réel, n et p entiers naturels) peut être obtenue en utilisant l'une des méthodes précédentes.**
• Lorsque l'un des exposants est impair, par exemple p, la mise en facteur de $\sin x$ et l'utilisation de l'égalité $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ permet d'écrire $f(x) = \sin x \times Q(\cos x)$ où Q est un polynôme. Ainsi, on sait trouver $F(x)$.
C'est le cas des exercices 81 et 82.
• Lorsque les deux exposants sont pairs, la méthode de linéarisation (voir TD 3, chapitre 12, page 332) permet d'écrire $f(x)$ sous forme d'une somme de termes de type $\lambda\cos(\alpha x)$ ou $\mu\sin(\beta x)$ dont on sait calculer une primitive.
C'est le cas des exercices 83 à 85.

86 • On se propose de trouver une primitive de la fonction $f : x \mapsto \sin^4 x$ sur $\mathbb{R}$.

1. Calculez $f'(x)$ et $f''(x)$.
2. Exprimez $f(x)$ en fonction de $f''(x)$ et $\cos(2x)$.
3. Déduisez-en une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

87 • On se propose de trouver une primitive de la fonction $f : x \mapsto e^{2x}\cos x$ sur $\mathbb{R}$.

1. Calculez $f'(x)$ et $f''(x)$.
2. Trouvez des réels a et b tels que pour tout réel x,
$$f(x) = af''(x) + bf'(x).$$
3. Déduisez-en une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

88 • f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 e^{2x}$.
Trouvez une primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(x) = P(x)e^{2x}$ où P est un polynôme de degré 3.

Aide. **Voir *Apprendre à chercher*, l'exercice 60, page 218.**

Calcul d'intégrales

Pour les exercices 89 à 98, calculez les intégrales I et J indiquées.

89 $I = \displaystyle\int_0^1 2t(t^2+1)^5\,dt$; $J = \displaystyle\int_1^2 \frac{t+1}{(t^2+2t)^2}\,dt$.

90 $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2t)\,dt$; $J = \displaystyle\int_1^{\frac{1}{2}} \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)dt$.

91 $I = \displaystyle\int_0^2 \frac{1}{2u+1}\,du$; $J = \displaystyle\int_2^1 \frac{u+1}{u^2+2u}\,du$.

92 $I = \displaystyle\int_0^{-1} \frac{2}{\sqrt{1-3x}}\,dx$; $J = \displaystyle\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{3x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$.

93 $I = \displaystyle\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - x\cos x}{x^2}\,dx$; $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\cos x - x\sin x)\,dx$.

94 $I = \displaystyle\int_{\frac{1}{3}}^1 e^{3x+4}\,dx$; $J = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^0 e^{\cos x}\sin x\,dx$.

95 • $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t\,dt$; $J = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 t\,dt$.

96 • $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)^2}\,dx$; $J = \displaystyle\int_{-1}^0 \frac{x^2-1}{x+2}\,dx$.

Aide. $\dfrac{1}{x(x+1)^2} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{c}{(x+1)^2}$;
$\dfrac{x^2-1}{x+2} = ax + b + \dfrac{c}{x+2}$.

97 • $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan t\,dt$; $J = \displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{t\ln t}\,dt$.

98 : $I = \displaystyle\int_2^3 \frac{2x}{(x-1)(x+2)}\,dx$;
$J = \displaystyle\int_0^3 \frac{x^2+3x+1}{2x+3}\,dx$.

Pour les exercices 99 et 100, utilisez la parité des fonctions pour évaluer les intégrales proposées.

99 **a)** $I = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (\sin x - x)\,dx$. **b)** $I = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1-e^x}{1+e^x}\,dx$.

Solutions du livre TransMath 2006 p216: Dans tout ce qui suit, $K \in \mathbb{R}$. Chaque fois qu'il est demandé UNE primitive, on les donne toutes par réflexe.

« Comme d'habitude, si l'une quelconque de ces intégrales venait à faillir, le département d'Etat nierait toute implication. »

- n°23 : **a)** $F(x)=\frac{1}{5}x^5-x^4+\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+K$; **b)** $F(x)=\frac{x^3-3x^2+3x}{9}+K$; **c)** $F(x)=x+\frac{1}{x}+K$.
- n°24 : **a)** $F(x)=\frac{-1}{x^2}+K$; **b)** $F(x)=\frac{3}{x}+K$; **c)** $F(x)=\frac{1}{2x^2}-\frac{4}{x}-x+K$.
- n°25 : **a)** $F(x)=2\sqrt{2x+1}+K$; **b)** $F(x)=2\sqrt{x^2-1}+K$; **c)** $F(x)=-2\sqrt{-x^2-5x+6}-x+K$.
- n°26 : **a)** $F(x)=\frac{2}{3}\sqrt{x}-\frac{4}{3x}-\sqrt{2}x+K$; **b)** $F(x)=2\sqrt{x-1}+K$; **c)** $F(x)=-4\sqrt{1-x}-x+K$.
- n°27 : **a)** $F(x)=\frac{1}{4}(x+2)^4+K$; **b)** $F(x)=\frac{(x-1)^6}{18}+K$; **c)** $F(x)=\frac{1}{8}(2x-1)^4+K$; **d)** $F(x)=\frac{1}{9}(3x-1)^6+K$
- n°28 : **a)** $F(x)=\frac{1}{8}(1+x^2)^8+K$; **b)** $F(x)=\frac{-1}{(x+4)^2}+K$; **c)** $F(x)=\frac{-1}{3(3x-1)}+K$.
- n°29 : **a)** $F(x)=\frac{-1}{(x^2-x+3)}+K$; **b)** $F(x)=\frac{1}{-2(x^2-2x-3)}+K$; **c)** $F(x)=\frac{-2}{3(x^3+8)^2}+K$.
- n°30 : **a)** $F(x)=\frac{1}{3}\sin(3x)-\frac{1}{2}\cos(2x)+K$; **b)** $F(x)=3\sin(x)+\cos(2x)+x+K$; **c)** $F(x)=\frac{-1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)+K$.
- n°31 : **a)** $F(x)=\frac{1}{2}\sin^2 x+K$; **b)** $F(x)=\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{3}{2}\sin^2 x+8\sin x+K$; **c)** $F(x)=2\tan x-x+K$.
- n°32 : **a)** $F(x)=\ln(x-4)+K$; **b)** $F(x)=\ln(4-x)+K$; **c)** $F(x)=\ln(x-x^2)+K$.
- n°33 : **a)** $F(x)=-e^{-x+1}+K$; **b)** $F(x)=\frac{2}{3}e^{3x-2}+K$; **c)** $F(x)=-e^{\frac{-x^2}{2}}+K$; **d)** $F(x)=-e^{\cos x}+K$.
- n°34 : **a)** $F(x)=\frac{1}{5}x^5+x^3-2x^2+x+\frac{-42}{5}$; **b)** $F(x)=\frac{-2}{x}+\frac{x^2}{2}+\frac{3}{2}$; **c)** $F(x)=\frac{1}{-2(2x+1)}+\frac{1}{2}$.
- n°35 : **a)** $F(x)=\frac{1}{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\sqrt{2}}{4}$; **b)** $F(x)=\frac{1}{3}\sin^3 x+\frac{2}{3}$; **c)** $F(x)=4\sin\frac{x}{2}+6\cos\frac{x}{2}-5\sqrt{2}$.
- n°36 : **a)** $F(x)=\frac{-1}{2x+1}-1$; **b)** $F(x)=\ln(3-x)+1-\ln 2$; **c)** $F(x)=\frac{-1}{2(x^2-1)}-\frac{1}{2}$.
- n°37 : **a)** $F(x)=\frac{1}{3}e^{3x+1}-\frac{1}{3e^2}$; **b)** $F(x)=\frac{-1}{2}e^{-x^2}+\frac{5}{4}$; **c)** $F(x)=\ln|x-1|+\ln|x+1|-\ln 3$.

- n°38: **a)** $I=-4$; **b)** $I=-6$; **c)** $I=\frac{23}{6}-\ln 2$; **d)** $I=1-2\ln 2$.
- n°39: **a)** $I=4$; **b)** $I=4$; **c)** $I=\frac{6}{5}$; **d)** $I=1$.
- n°40: **a)** $I=\frac{15}{8}$; **b)** $I=2$; **c)** $I=\frac{\ln 6}{4}$.
- n°41: **a)** $I=-2+2\sqrt{5}$; **b)** $I=\frac{3}{7}$; **c)** $I=\frac{1}{2}$; **d)** $I=0$.
- n°42: **a)** $I=3-\sqrt{7}$; **b)** $I=\sqrt{2}$; **c)** $I=3\ln 2+1$; **d)** $I=0$.

- n°43: **a)** $I=\ln 2-\frac{1}{3}\ln 5$; **b)** $I=\frac{5}{3}(\mathrm{e}^3\text{-}1)$; **c)** $I=\frac{1}{3}(e^7-e)$; **d)** $I=\frac{e-1}{2e}$.
- n°44: $I=\frac{1}{2}+\ln 3$; $J=\frac{3}{8}+\ln 2$.
- n°45: **a)** $I=\frac{e^2-1}{2}$; **b)** $J=0$; **c)** $K=0$.
- n°46: **1)** $(a,b)=\left(\frac{1}{6},\frac{-1}{6}\right)$; **2)** $I=\frac{-2\ln 2+\ln 7}{6}$.
- n°47: **1)** $(a,b,c)=(4,-17,52)$; **2)** $I=26(1-2\ln 5+2\ln 3)$.
- n°48: **1)** $(a,b,c)=(1,2,1)$; **2)** $I=\frac{15}{4}-4\ln 2$.
- n°49: **2)** $I=-\ln(1+e)+1+\ln 2$.
- n°51: **a)** $I=\frac{e^2+1}{4}$; **b)** $J=e^2+1$.
- n°52: **a)** $I=0$; **b)** $J=2e-1$.
- n°53: **a)** $I=\frac{\pi}{3}$; **b)** $J=\frac{-5}{e}+3$.
- n°54: **a)** $I=\frac{e^2(3-e^2)}{4}$; **b)** $J=\frac{4-2\sqrt{2}}{3}$.
- n°55: $F(t)=t\sin t+\cos t+1$.
- n°56: $F(t)=\frac{3t^3\ln t-t^3+1}{9}$.
- n°57: $F(t)=\frac{-\ln t-1+t}{t}$.
- n°58: $F(t)=-4te^{\frac{-t}{2}}-8e^{\frac{-t}{2}}+8$.

- n°62: **a)** $F(x)=\frac{1}{10}(x^2+2x-1)^5+K$; **b)** $F(x)=\frac{1}{4(2x^2-2x+1)^2}+K$; **c)** $F(x)=-\sqrt{x^2-2x+2}+K$; **d)** $F(x)=\frac{-1}{12}(-2x+1)^6+K$.
- n°63: **a)** $F(x)=\frac{2}{3}\ln(3x+1)+K$; **b)** $F(x)=\frac{1}{3}\ln(x^3-1)+K$; **c)** $F(x)=\frac{1}{3}\ln(1-x^3)+K$; **d)** $F(x)=\ln(\sin(x))+K$.
- n°64: **a)** $F(x)=\frac{e^{2x+1}}{2}+K$; **b)** $F(x)=\frac{-2}{3}e^{-3x+2}+K$; **c)** $F(x)=\frac{1}{2}e^{\frac{-2}{x}}+K$; **d)** $F(x)=e^{\frac{2x+1}{x+1}}+K$.
- n°65: **a)** $F(x)=x\sin x+K$; **b)** $F(x)=\frac{-\sin x}{x}+K$; **c)** $F(x)=\frac{-\ln x}{x}+K$; **d)** $F(x)=x\sqrt{x+1}+K$.
- n°66: **a)** $F(x)=\frac{1}{2}\ln^2(x)+K$; **b)** $F(x)=\ln(\ln(x))+K$; **c)** $F(x)=\ln(e^x+e^{-x})+K$;.
- n°67: **a)** $F(x)=\frac{1}{2}\tan^2 x+K$; **b)** $F(x)=\tan x-x+K$; **c)** $F(x)=\frac{-1}{\tan x}+K$.
- n°68: **2)** $V(x)=\frac{1}{3}\frac{\sin x}{\cos^3 x}+\frac{2}{3}\tan x+\frac{-1}{3}$.
- n°69: $(a,b)=(1,1)$ et $F(x)=x+\ln(x-1)+K$

- n°70: $(a,b)=(2,3)$ et $F(x)=2x+\frac{3}{2}\ln(-2x-1)+K$
- n°71: $(a,b,c)=(2,1,-2)$ et $F(x)=x^2+x+2\ln(x-2)+K$
- n°72: **a,c)** $F(x)=\ln((x-3)(x+3))+K$; **b)** $F(x)=\ln(-(x-3)(x+3))+K$
- n°73: $(a,b,c)=(1,2,1)$ et $F(x)=x+2\ln(-x-2)-\frac{1}{x+2}+K$
- n°74: $(a,b,c)=(2,1,-7)$ et $F(x)=x^2+x+\frac{7}{x+3}+K$
- n°75: $(a,b,c)=(2,1,-1)$ et $F(x)=2x+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+2x}{1-2x}\right)+K$
- n°76: $(a,b)=\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)$ et $F(x)=\frac{3}{4(x-1)}+\frac{1}{4(x+1)}+K$
- n°77: $(a,b)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ et $F(x)=\frac{-1}{4(x-1)^2}+\frac{-1}{4(x+1)^2}+K$
- n°78: $(a,b)=(1,1)$ et $F(x)=\frac{-1}{2(x+1)^2}+\frac{-1}{3(x+1)^3}+K$

- n°79: $F(x)=\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+K$.
- n°80: $F(x)=-2\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x+K$
- n°81: $(a,b)=(1,-1)$ et $F(x)=-\frac{1}{3}\cos^3 x+\frac{1}{5}\cos^5 x+K$.
- n°82: $(a,b,c)=(1,-2,1)$ et $F(x)=\frac{1}{5}\sin^5 x-\frac{2}{7}\sin^7 x+\frac{1}{9}\sin^9 x+K$
- n°83: $F(x)=\frac{1}{32}\sin(4x)-\frac{1}{4}\sin(2x)+\frac{3x}{8}+K$.
- n°84: $F(x)=\frac{1}{32}\sin(4x)+\frac{1}{4}\sin(2x)+\frac{3x}{8}+K$.
- n°85: $F(x)=\frac{-1}{32}\left(\frac{1}{6}\sin(6x)+\frac{1}{2}\sin(4x)-\frac{1}{2}\cos(2x)-2x\right)+K$.

- n°89: **a)** $I=\frac{15}{4}$; **b)** $J=\frac{5}{48}$.
- n°90: **a)** $I=\frac{1}{2}$; **b)** $J=0$.
- n°91: **a)** $I=\frac{\ln 5}{2}$; **b)** $J=\frac{1}{2}(\ln 3-3\ln 2)$.
- n°92: **a)** $I=\frac{-4}{3}$; **b)** $J=6-3\sqrt{2}$.
- n°93: **a)** $I=\frac{-2}{\pi}$; **b)** $J=\frac{\pi}{6}$.
- n°94: **a)** $I=\frac{e^7-e^5}{3}$; **b)** $J=-e+\sqrt{e}$.
- n°95: **a)** $I=\frac{2}{3}$; **b)** $J=\frac{-1}{4}+\frac{5\pi}{24}-\frac{\sqrt{3}}{8}$.

- n°96: **a)** $I=\frac{-1}{6}+2\ln(2)-\ln(3)$; **b)** $J=3\ln 2-\frac{5}{2}$.
- n°97: **a)** $I=\ln 2$; **b)** $J=\ln 2$.
- n°98: **a)** $I=-2\ln 2+\frac{4}{3}\ln 5$; **b)** $J=\frac{9}{2}-\frac{5}{8}\ln 3$.
- n°99: **a)** $I=0$; **b)** $J=0$.
- n°100: **a)** $I=0$; **b)** $J=0$.

.

BONUS :

$$\int_1^e \frac{\sqrt{x}+\ln x}{x}dx=2\sqrt{e}-\frac{3}{2}$$

$$\int_2^3 \frac{x^2+1}{x-1}dx=\frac{7}{2}+2\ln 2$$

$$\int_1^{\ln 2} \frac{e^x dx}{e^x-1}=-\ln(e-1)$$

$$\int_0^8 \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}=\frac{-44}{3}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{e^x+1}=-\ln(1+e^{-1})$$

$$\int x^2e^{3x}dx=\frac{e^{3x}}{27}(9x^2-6x+2)$$

$$\int (x^2-2x+5)e^{-x}dx=-(x^2+5)e^x$$

$$\int_1^\alpha \frac{\ln x}{x^3}dx=\frac{-\ln x}{2x^2}-\frac{1}{4x^2}$$

$$\int_1^\alpha \frac{\ln^2 x}{x^2}dx=\frac{-\ln^2 x}{x}-\frac{2\ln x}{x}-\frac{2}{x}$$

$$\int \frac{dx}{x^3-2x^2+x}=\ln\left|\frac{x}{x-1}\right|-\frac{1}{x-1}$$

$$\int \frac{xdx}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{-1}{2(x+1)}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$$

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx=\frac{1}{3}$$

$$\int_1^e \frac{1-\sqrt{\ln x}}{x}dx=\frac{1}{3}$$

$$\int_0^1 \frac{2x-1}{x^2+2x-8}=\frac{3}{5}\ln 5-\frac{7}{2}\ln 2$$

$$\int_0^1 \frac{x+1}{1+\sqrt{x}}dx=\frac{11}{3}-4\ln 2$$

$$\int_1^e x\sqrt{x}\ln xdx=\frac{6e^{\frac{5}{2}}+4}{25}$$

$$\int_1^e \ln^3 xdx = -2e+6$$