Nom :
Classe : TS€

G.I.'s Training (2h)
Step II: Keep Warm.

***« Run Shadowfax,
show us the meaning of haste. »
Gandalf.***

Il s'agit d'un <u>QCM négatif</u> : 1 point par question intégralement juste.
0,5 s'il manque une réponse juste ou si une réponse fausse est cochée.
0 sinon.

Tout document est autorisé, votre voisin n'est pas un document.
On cochera les réponses considérées justes dans le tableau à la fin de la dernière page.

1. On considère les nombres complexes $u=1-i$, $v=1-i\sqrt{3}$ et $z=\dfrac{u^5}{v^4}$.

a) $|z|=\dfrac{1}{4}\sqrt{2}$.

b) $\arg(z)\equiv-\dfrac{\pi}{12}\ (2\pi)$.

c) $z=\dfrac{u}{2v}$.

d) $z=\dfrac{\sqrt{3}+1}{8}+\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{8}\right)i$.

e) $\cos\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

a	b	c	d	e

2. On considère les complexes $u=-12i\sqrt{3}+12$, $v=-6\sqrt{3}+6i$ et $z=\dfrac{u}{v}$.

a) $|u|=24$ et $\arg(u)\equiv\dfrac{5\pi}{3}\ (2\pi)$.

b) $|v|=12$ et $\arg(v)\equiv\dfrac{7\pi}{6}\ (2\pi)$.

c) Si n est un entier naturel multiple de 3, alors u^n est un réel négatif.

d) $z^4+\bar{z}^{-4}$ est un réel négatif.

e) $z=-\sqrt{3}+i$.

a	b	c	d	e

3. On considère le nombre complexe $z=\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)+i\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$.

a) $\left|z^2\right|=8\sqrt{3}$.

b) $\arg\left(z^2\right)\equiv\dfrac{5\pi}{6}\ (2\pi)$.

c) $z=4\left(\cos\dfrac{5\pi}{12}+i\sin\dfrac{5\pi}{12}\right)$.

d) $z^{2004}\in\mathbb{R}$.

e) Si $n=12k+6$ où $k\in\mathbb{N}$, alors z^n est imaginaire pur.

a	b	c	d	e

4. z et z' désignent deux nombres complexes.

a) Si z et z' sont réels, alors $|z+z'|=|z|+|z'|$.

b) $|z|^2=z^2$ si et seulement si $z\in\mathbb{R}$.

c) Si z est imaginaire pur, alors $|z|^2=-z^2$.

d) $z^2=\bar{z}^2$ si et seulement si $z\in\mathbb{R}$.

e) $|z|=1$ si et seulement si $\bar{z}=\dfrac{1}{z}$.

a	b	c	d	e

5. z et z' sont deux nombres complexes et u est un complexe différent de 1.

a) Si $|z|=|z'|=1$ et si $zz'\neq-1$, alors le nombre $\dfrac{z+z'}{1+zz'}$ est réel.

b) Si $|u|=1$ alors $\dfrac{z-u\bar{z}}{1-u}\in\mathbb{R}$.

c) Si $\dfrac{z-u\bar{z}}{1-u}\in\mathbb{R}$ alors $|u|=1$.

d) Si u est réel, alors $\left|\dfrac{1+iu}{1-iu}\right|=1$.

e) Si $\left|\dfrac{1+iu}{1-iu}\right|=1$, alors u est réel.

a	b	c	d	e

6. Soient $\alpha \in]0;\pi[$, $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$ et $Z = \dfrac{1-z}{1+z}$.

a) $1+z = 2\cos\dfrac{\alpha}{2}\left(\cos\dfrac{\alpha}{2} + i\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

b) $|1-z| = 2\sin\dfrac{\alpha}{2}$.

c) $\arg(1-z) \equiv \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\alpha}{2}\ (2\pi)$.

d) Z est un imaginaire pur.

e) $|Z| = 1 \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{2}$.

a	b	c	d	e

7. Soient $\theta \in \left]\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$ et $z = -\sin 2\theta + 2i\cos^2\theta$.

a) $|z| = 2\cos\theta$.

b) $\arg(z) \equiv \dfrac{\pi}{2} - \theta\ \ (2\pi)$.

c) $|z|^2 = 4\cos^2\theta$.

d) $\arg(z^2) = \pi + 2\theta\ \ (2\pi)$.

e) Il existe deux valeurs de θ telles que $|z| = |1-z|$.

a	b	c	d	e

8. Soient $\theta \in \left]\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right[$, $z = 1+\cos 2\theta + i\sin 2\theta$ et $Z = \dfrac{1+\cos 2\theta + i\sin 2\theta}{\cos\theta - i\sin\theta}$.

a) $|z| = -2\cos\theta$.

b) $\arg(z) \equiv \pi - \theta\ \ (2\pi)$.

c) $|Z| = -2\cos\theta$.

d) $\arg(Z) \equiv \pi + 2\theta\ \ (2\pi)$.

e) Z est réel si et seulement si $\theta = \pi$.

a	b	c	d	e

9. Soit (E) l'équation $z^4 + 3z^2 + 6z + 10 = 0$ où z est l'inconnue complexe.

a) Il existe un unique couple $(\alpha;\beta)$ de réels tel que, quel que soit z, on ait : $z^4 + 3z^2 + 6z + 10 = (z^2+1)^2 + \alpha(z-\beta)^2$.

b) Si z est solution de (E), alors z est aussi solution de (E') : $z^2 - iz + 1 - 3i = 0$.

c) Il existe un unique couple $(\alpha;\beta)$ tel que $(\alpha + i\beta)^2 = -5 + 12i$.

d) $1+2i$ est solution de (E').

e) L'ensemble des solutions de (E) est $S = \{1+2i; 1-2i; -1+i; -1-i\}$

a	b	c	d	e

10. On donne $a \in \left]\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right[$ et $p = e^{ia}$. Soit (E) l'équation $z^2 - 2pz + 1 = 0$ où z est l'inconnue complexe.

a) (E) a deux solutions qui sont inverses l'une de l'autre.

b) $1 - p^2 = 2\cos a(\cos a - i\sin a)$.

c) Si z est solution de (E), alors $|z-p| = -\cos a$.

d) Si z est solution de (E), alors $\arg(z-p) \equiv \dfrac{-a}{2}\ \ (\pi)$.

e) Si $a = \dfrac{2\pi}{3}$, l'une des solutions de (E) est $\dfrac{1}{2}(1+\sqrt{3})(1-i)$.

a	b	c	d	e

11. Soit $z_0 = e^{\frac{2i\pi}{5}}$. On pose $\alpha = z_0 + z_0^{\,4}$ et $\beta = z_0^{\,2} + z_0^{\,3}$.

a) $1 + \alpha + \beta = 0$.

b) $\alpha\beta = -1$.

c) α et β sont solutions de l'équation $X^2 - X - 1 = 0$.

d) $\alpha = 2\cos\dfrac{2\pi}{5}$.

e) $\cos\dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$.

a	b	c	d	e

12. Soit $u = e^{\frac{2i\pi}{7}}$. On pose $S = u + u^2 + u^4$ et $T = u^3 + u^5 + u^6$.

a) S et T sont conjugués.

b) $S+T$= -1.

c) ST=3.

d) La partie imaginaire de S est négative.

e) $S = \dfrac{-1-i\sqrt{7}}{2}$ et $T = \dfrac{-1+i\sqrt{7}}{2}$.

a	b	c	d	e

13. On considère les nombres complexes $j=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $u=1+j$.

a) $1+j+j^2=0$.

b) $j^2=\overline{j}$.

c) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $u^{2n+1}=(-j)^{n+2}$.

d) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $u^{2n}=j^{n+3}$.

e) $u^{2002}=\dfrac{-1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

a	b	c	d	e

14. Soit $Z=\dfrac{iz+1}{z+i}$ où $z=x+iy$ avec $(x,y)\neq(0,-1)$.

a) $\overline{Z}=\dfrac{-iz+1}{z-i}$.

b) $Z=\dfrac{2z+i(z^2-1)}{z^2+1}$.

c) La partie réelle de Z est $\dfrac{2x}{x^2+(y+1)^2}$.

d) La partie imaginaire de Z est $\dfrac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2}$.

e) $|Z|=1\Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$.

a	b	c	d	e

15. Le plan est muni du repère orthonormal direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. A tout point M d'affixe *z*, distincte de 1+*i* on associe le point M' d'affixe $Z=\dfrac{2iz}{1+i-z}$. On note A le point d'affixe 1+*i*.

a) $|Z|=\dfrac{\text{MO}}{\text{MA}}$.

b) $\arg Z\equiv(\overrightarrow{\text{MA}},\overrightarrow{\text{MO}})+\dfrac{\pi}{2}\ \ (2\pi)$.

c) L'ensemble des points M tels que *Z* soit réel est le cercle de diamètre [OA] privé de A.

d) L'ensemble des points M tels que *Z* soit imaginaire pur et différent de 0 est la droite (AO) privée de A.

e) L'ensemble des points M tels que $|Z|=1$ est la médiatrice de [OA].

a	b	c	d	e

16. Le plan est muni du repère orthonormal direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. Les points A et B sont les points d'affixes respectives 1 et -2*i*.

a) L'ensemble des points M d'affixe *z* vérifiant $(2+i)z+(2-i)\overline{z}=4$ est la droite (AB).

b) L'ensemble des points M d'affixe *z* vérifiant $(z+2i)(\overline{z}-2i)=4$ est le cercle de centre B et de rayon 4.

Désormais, on suppose $z\neq-2i$ et on pose $Z=\dfrac{\overline{z}+4i}{\overline{z}-2i}$. On désigne par M le point d'affixe *z* et par M' celui d'affixe Z.

c) $Z-1=\dfrac{6i}{\overline{z}-2i}$.

d) $\text{BM}\times\text{AM'}=6$.

e) Si M appartient au cercle de centre B et de rayon 2, alors $(\overrightarrow{\text{AM'}},\overrightarrow{\text{BM}})\equiv\dfrac{\pi}{2}\ \ (2\pi)$.

a	b	c	d	e

17. Le plan est muni du repère orthonormal direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. On note *a*,*b* et *c* les affixes respectives de A,B et C. En outre, $j=e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

a) $\overline{j}=j^2$ et $1+j+j^2=0$.

b) Le triangle ABC est équilatéral si et seulement si C est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

c) Si $c-a=-\overline{j}(b-a)$, alors le triangle ABC est équilatéral.

d) Si $aj+bj^2+c=0$, alors le triangle ABC est équilatéral.

e) Le triangle ABC est équilatéral équivaut à $a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc$.

a	b	c	d	e

18. Le plan est muni du repère orthonormal direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. A tout couple (z,z’), on associe le nombre $\varphi(z,z')=z\overline{z'}+\overline{z}z'$.

a) Quel que soit le couple (z,z’), on a $\varphi(z,z')\in[0,+\infty[$.

b) Si $z=x+iy$ et $z'=x'+iy'$ alors $\varphi(z,z')=2(xx'+yy')$.

c) Si $z=re^{i\theta}$ et $z'=r'e^{i\theta'}$, alors $\varphi(z,z')=2rr'\cos(\theta-\theta')$.

d) L’ensemble des points M d’affixe *z* tels que $\varphi(z,1+i)=2\sqrt{2}$ est la droite d’équation $x+y+\sqrt{2}=0$.

e) L’ensemble des points M d’affixe *z* tels que $\varphi(z,z)=2$ est le cercle unitaire.

a	b	c	d	e

19. Le plan est muni du repère orthonormal direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. On note A,B,C les points deux à deux distincts, d’affixes respectives $1,z,z^2$ où *z* est un complexe distinct de -1,0,1.

a) Le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $\arg\left(\dfrac{z^2-1}{z-1}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}\quad(2\pi)$.

b) Le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $z+\overline{z}=-2$.

c) Le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $\mathrm{Re}(z)=-1$.

d) Le triangle ABC est rectangle en B si et seulement si *z* est imaginaire pur.

e) Le triangle ABC est rectangle en C si et seulement si $z\overline{z}+z+\overline{z}=0$.

a	b	c	d	e

20. Le plan est muni du repère orthonormal direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. Tout point M du plan est repéré par son affixe *z*. Soit (E) l’ensemble des points du carré ABCD d’affixes respectives 1,*i*,-1,-*i*.

a) Si $M\in E$ alors $\left|z+\overline{z}\right|\leq 2$.

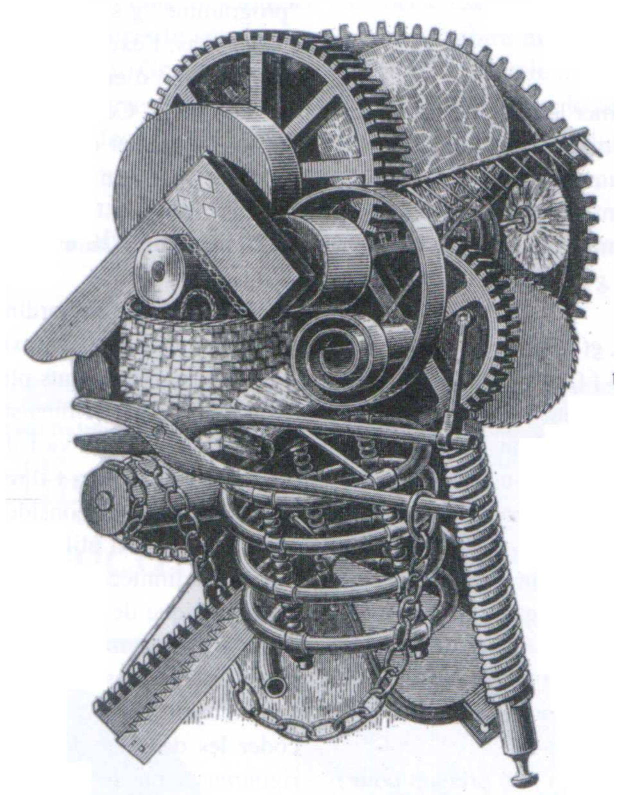
b) Si $\left|z+\overline{z}\right|\leq 2$ alors $M\in E$.

c) Si $M\in E$ alors $|z|\leq 1$.

d) Si $M\in E$ alors $\left|z-\overline{z}\right|\leq 2$.

e) $M\in E$ si et seulement si $\left|z+\overline{z}\right|\leq 2$ et $\left|z-\overline{z}\right|\leq 2$.

a	b	c	d	e



1. A,C,D ; **2**. A,D,E ; **3**. B,C,D,E ; **4**. B,C,E ; **5**. A,B,D,E; **6**. A,B,D,E; **7**. C,D,E; **8**. A,C,D,E; **9**. A,D,E; **10**. A,B,D,E; **11**. A,B,D; **12**. A,B; **13**. A,B,D,E; **14**. C,D,E; **15**. C; **16**. A,C,D; **17**. A,C,D,E; **18**. B,C,E; **19**. B,C,D,E; **20**. B,C,D.

1. A,C,D ; **2**. A,D,E ; **3**. B,C,D,E ; **4**. B,C,E ; **5**. A,B,D,E; **6**. A,B,D,E; **7**. C,D,E; **8**. A,C,D,E; **9**. A,D,E; **10**. A,B,D,E; **11**. A,B,D; **12**. A,B; **13**. A,B,D,E; **14**. C,D,E; **15**. C; **16**. A,C,D; **17**. A,C,D,E; **18**. B,C,E; **19**. B,C,D,E; **20**. B,C,D.

1. A,C,D ; **2**. A,D,E ; **3**. B,C,D,E ; **4**. B,C,E ; **5**. A,B,D,E; **6**. A,B,D,E; **7**. C,D,E; **8**. A,C,D,E; **9**. A,D,E; **10**. A,B,D,E; **11**. A,B,D; **12**. A,B; **13**. A,B,D,E; **14**. C,D,E; **15**. C; **16**. A,C,D; **17**. A,C,D,E; **18**. B,C,E; **19**. B,C,D,E; **20**. B,C,D.

1. A,C,D ; **2**. A,D,E ; **3**. B,C,D,E ; **4**. B,C,E ; **5**. A,B,D,E; **6**. A,B,D,E; **7**. C,D,E; **8**. A,C,D,E; **9**. A,D,E; **10**. A,B,D,E; **11**. A,B,D; **12**. A,B; **13**. A,B,D,E; **14**. C,D,E; **15**. C; **16**. A,C,D; **17**. A,C,D,E; **18**. B,C,E; **19**. B,C,D,E; **20**. B,C,D.

1. A,C,D ; **2**. A,D,E ; **3**. B,C,D,E ; **4**. B,C,E ; **5**. A,B,D,E; **6**. A,B,D,E; **7**. C,D,E; **8**. A,C,D,E; **9**. A,D,E; **10**. A,B,D,E; **11**. A,B,D; **12**. A,B; **13**. A,B,D,E; **14**. C,D,E; **15**. C; **16**. A,C,D; **17**. A,C,D,E; **18**. B,C,E; **19**. B,C,D,E; **20**. B,C,D.

1. A,C,D ; **2**. A,D,E ; **3**. B,C,D,E ; **4**. B,C,E ; **5**. A,B,D,E; **6**. A,B,D,E; **7**. C,D,E; **8**. A,C,D,E; **9**. A,D,E; **10**. A,B,D,E; **11**. A,B,D; **12**. A,B; **13**. A,B,D,E; **14**. C,D,E; **15**. C; **16**. A,C,D; **17**. A,C,D,E; **18**. B,C,E; **19**. B,C,D,E; **20**. B,C,D.

1. A,C,D ; **2**. A,D,E ; **3**. B,C,D,E ; **4**. B,C,E ; **5**. A,B,D,E; **6**. A,B,D,E; **7**. C,D,E; **8**. A,C,D,E; **9**. A,D,E; **10**. A,B,D,E; **11**. A,B,D; **12**. A,B; **13**. A,B,D,E; **14**. C,D,E; **15**. C; **16**. A,C,D; **17**. A,C,D,E; **18**. B,C,E; **19**. B,C,D,E; **20**. B,C,D.

1. A,C,D ; **2**. A,D,E ; **3**. B,C,D,E ; **4**. B,C,E ; **5**. A,B,D,E; **6**. A,B,D,E; **7**. C,D,E; **8**. A,C,D,E; **9**. A,D,E; **10**. A,B,D,E; **11**. A,B,D; **12**. A,B; **13**. A,B,D,E; **14**. C,D,E; **15**. C; **16**. A,C,D; **17**. A,C,D,E; **18**. B,C,E; **19**. B,C,D,E; **20**. B,C,D.

1. A,C,D ; **2**. A,D,E ; **3**. B,C,D,E ; **4**. B,C,E ; **5**. A,B,D,E; **6**. A,B,D,E; **7**. C,D,E; **8**. A,C,D,E; **9**. A,D,E; **10**. A,B,D,E; **11**. A,B,D; **12**. A,B; **13**. A,B,D,E; **14**. C,D,E; **15**. C; **16**. A,C,D; **17**. A,C,D,E; **18**. B,C,E; **19**. B,C,D,E; **20**. B,C,D.

1. A,C,D ; **2**. A,D,E ; **3**. B,C,D,E ; **4**. B,C,E ; **5**. A,B,D,E; **6**. A,B,D,E; **7**. C,D,E; **8**. A,C,D,E; **9**. A,D,E; **10**. A,B,D,E; **11**. A,B,D; **12**. A,B; **13**. A,B,D,E; **14**. C,D,E; **15**. C; **16**. A,C,D; **17**. A,C,D,E; **18**. B,C,E; **19**. B,C,D,E; **20**. B,C,D.

1. A,C,D ; **2**. A,D,E ; **3**. B,C,D,E ; **4**. B,C,E ; **5**. A,B,D,E; **6**. A,B,D,E; **7**. C,D,E; **8**. A,C,D,E; **9**. A,D,E; **10**. A,B,D,E; **11**. A,B,D; **12**. A,B; **13**. A,B,D,E; **14**. C,D,E; **15**. C; **16**. A,C,D; **17**. A,C,D,E; **18**. B,C,E; **19**. B,C,D,E; **20**. B,C,D.

1. A,C,D ; **2**. A,D,E ; **3**. B,C,D,E ; **4**. B,C,E ; **5**. A,B,D,E; **6**. A,B,D,E; **7**. C,D,E; **8**. A,C,D,E; **9**. A,D,E; **10**. A,B,D,E; **11**. A,B,D; **12**. A,B; **13**. A,B,D,E; **14**. C,D,E; **15**. C; **16**. A,C,D; **17**. A,C,D,E; **18**. B,C,E; **19**. B,C,D,E; **20**. B,C,D.

1. A,C,D ; **2**. A,D,E ; **3**. B,C,D,E ; **4**. B,C,E ; **5**. A,B,D,E; **6**. A,B,D,E; **7**. C,D,E; **8**. A,C,D,E; **9**. A,D,E; **10**. A,B,D,E; **11**. A,B,D; **12**. A,B; **13**. A,B,D,E; **14**. C,D,E; **15**. C; **16**. A,C,D; **17**. A,C,D,E; **18**. B,C,E; **19**. B,C,D,E; **20**. B,C,D.

1. A,C,D ; **2**. A,D,E ; **3**. B,C,D,E ; **4**. B,C,E ; **5**. A,B,D,E; **6**. A,B,D,E; **7**. C,D,E; **8**. A,C,D,E; **9**. A,D,E; **10**. A,B,D,E; **11**. A,B,D; **12**. A,B; **13**. A,B,D,E; **14**. C,D,E; **15**. C; **16**. A,C,D; **17**. A,C,D,E; **18**. B,C,E; **19**. B,C,D,E; **20**. B,C,D.

1,2 Passer à la forme exp.
3. Utiliser la calculatrice.
4. Inégalité triangulaire et interprétation géométrique.
5. Utiliser $\bar{z}=1/z$ quand z est sur le cercle trigo. On a $\bar{U}=U$ donc $(1-u\bar{u})(z-\bar{z})=0$.
6. $1-z=2\sin\frac{\alpha}{2}e^{i\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}$ et $Z=-i\tan\frac{\alpha}{2}$ avec e) $\frac{\alpha}{2}=\frac{\pi}{4}\ (\pi)$ et $\alpha\in\left]0;\pi\right[$.
7.e) $\sin 2\theta=\frac{-1}{2}\Leftrightarrow\theta=\frac{7\pi}{12}\ ou\ \frac{11\pi}{12}$
8. $1+\cos 2\theta+i\sin 2\theta=2\cos^2\theta+2i\sin\theta\cos\theta=-2\cos\theta e^{i(\theta+\pi)}$ et $Z=-2\cos\theta e^{i(2\theta+\pi)}$.
9. a) développer résoudre : $(\alpha,\beta)=(1,-3)$.
b) Ruse : $\left(z^2+1\right)^2+\left(z+3\right)^2=\left(z^2+1\right)^2-i^2(z+3)^2=(z^2-iz+1-3i)(z^2+iz+1+3i)$.
c) $(\alpha,\beta)\in\left\{(2;3),(-2;-3)\right\}$. d) calcul. e) coeff réels donc sol conjuguées.
10. a) le produit des deux sol est 1. b) développer. c)d) calculer $(z-p)^2=p^2-1=-2\cos a.e^{-ia}$
11. a) suite géom. b) $\alpha\beta=\alpha+\beta$ d) $z_0{}^4=1/z_0=\overline{z_0}$
12. $\bar{S}=\frac{1}{u}+\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u^4}=T$, ST=2. e) calculatrice.
13. $u^{2n+1}=-j^{n+2}$, $2002\equiv 1\ (3)$
14. calculer Im et Re, e) $Z\bar{Z}=1\Leftrightarrow 2i(z-\bar{z})=0\Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$.
15. a) $2\times\frac{MO}{MA}$ b) $Z=-2i\left(\frac{0-z}{(1+i)-z}\right)$donc $\arg Z\equiv(\overrightarrow{\mathrm{MA}},\overrightarrow{\mathrm{MO}})-\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$ e) $4MO^2-MA^2$ factoriser, introduire les deux barycentres I et J et on obtient le cercle de diamètre [IJ].
16 $2(z+\bar{z})+i(z-\bar{z})=4\Leftrightarrow 2x-y-4=0$ b) rayon 2. d) $|Z-1|\times|\bar{z}-2i|=|Z-1|\times|z+2i|=|6i|=6$ e) $\frac{-\pi}{2}$
17. b) ou $\frac{-\pi}{3}$. e) $(aj+bj^2+c)(aj^2+bj+c)=0$.
18. z=1 et z'=-1 donc $\varphi=-2$. e) $2r^2=2\Rightarrow r=1$.
19. b) $\frac{z^2-1}{z-1}=z+1\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow z+1+\bar{z}+1=0$. d) $\frac{z^2-z}{z-1}=z$. e) $\frac{z^2-z}{z^2-1}=\frac{z}{z+1}\in i\mathbb{R}$.
20. contre exemple usuel : 1+i.