G.I.'s Training (1h)
Step IV: Mind the step.

« I got stuck doing a piece for Vanity Fair »
Tony Stark.

Gulliver est en classe de terminale. Il doit passer son bac cette année et cela l'inquiète un peu. Il aurait bien besoin de son grigri-doudou Lilli pour y parvenir. On étudie dans ce problème ses chances de succès, ainsi que celles de ses camarades de classe.

Les probabilités et autres valeurs demandées seront données arrondies à 10^{-3} près.

Partie A : Dans cette partie, on ne s'intéresse qu'à Gulliver et Lilli. On suppose que la probabilité qu'il pense à amener Lilli le jour du bac est de 0,8. De plus, s'il a Lilli avec lui, la probabilité qu'il ait son bac est 0,9. En revanche, s'il l'a oublié, il n'aura pas son bac avec une probabilité égale à 0,7.

On notera D l'évènement : « Il amène son doudou au bac ». Et l'évènement B : « Il obtient le bac ».

1. Tracer un arbre afin de résumer la situation décrite et le compléter.
2. Montrer que $p(B)=0,78$.
3. Le jour des résultats du bac, il apprend qu'il l'a raté. Quelle est la probabilité qu'il ait oublié Lilli quand il l'avait passé ?

Partie B : Dans cette partie, les 35 camarades de classe de Gulliver sont aussi concernés. Ils n'ont pas osé se l'avouer, mais ils ont tous eu pour intention de passer leur bac avec leur doudou dans la poche. On admet que la probabilité d'avoir le bac pour chacun d'entre eux est encore p=0,78.

On note S la variable aléatoire du nombre de reçus au bac dans la classe de Gulliver.

1. Quelle est la loi de S ?
2. Calculer la probabilité qu'ils soient tous recalés.
3. Quelle est la probabilité qu'au plus deux d'entre eux ne l'aient pas ?
4. En moyenne, combien d'élèves de la classe vont redoubler cette année ?

Partie C : (en chantier) Dans cette partie, on suppose que chaque élève de la classe a une probabilité p=0,78 d'avoir le bac. On approche la loi S du nombre de reçus par une loi normale T.

1. Quel est le théorème qui permettrait de faire une telle approximation. Vérifier les conditions d'application de ce théorème et donner les paramètres de la loi T.
2. Calculer la probabilité qu'il y ait au plus deux d'entre eux qui ne l'aient pas ? Comparez votre résultat à celui obtenu en B.3.
3. Calculer la probabilité qu'il y ait entre 10 et 30 reçus.
4. Déterminer le plus petit intervalle $[a,b]$ tel que $p(a\le T\le b)\simeq 0,95$

Partie D : On s'intéresse à nouveau uniquement au sort de notre ami Gulliver. On imagine qu'il a toujours la même probabilité $p=0,78$ d'avoir le bac à chaque fois qu'il le tente courageusement et que chaque essai est indépendant des précédents.

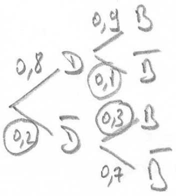
1. Quelle est la probabilité qu'il l'ait au troisième essai ?
2. Quelle est la probabilité qu'il l'ait en trois essais ou moins ?
3. Quelle est la probabilité qu'il doive le passer plus de cinq fois (strictement)?
4. Quelle est la probabilité qu'il l'ait en le passant au plus n fois ?
5. Quel est le plus petit n pour qu'il ait plus de 99% de chance de l'avoir eu au cours des n premières épreuves ?

Partie E : On suppose que la variable aléatoire Y désigne le nombre de bacs ratés par Gulliver et suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1. Déterminer λ pour que $p(Y\le 3)=0,99$.
2. Déterminer la probabilité qu'il l'ait raté au moins 2 fois.
3. Calculer la probabilité qu'il l'ait raté au moins 7 fois sachant qu'il l'a déjà raté 5 fois.

GI'S Training   Gulliver

A 1°)



Données complétées par la loi des noeuds.

2°) On utilise la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements $\{D, \bar{D}\}$.

$$p(B) = p(D \cap B) + p(\bar{D} \cap B) = p_D(B) \times p(D) + p_{\bar{D}}(B)\, p(\bar{D})$$

$$= 0{,}9 \times 0{,}8 + 0{,}3 \times 0{,}2 = \boxed{0{,}78}$$

3°) On cherche $p_{\bar{B}}(\bar{D}) = \dfrac{p(\bar{D} \cap \bar{B})}{p(\bar{B})} = \dfrac{p_{\bar{D}}(\bar{B}) \times p(\bar{D})}{p(\bar{B})} \simeq \boxed{0{,}636}$

B 1°) L'épreuve aléatoire est la succession de 36 (35+1) épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de même probabilité de succès $p = 0{,}78$. Le nombre S de succès suit une loi binomiale $\mathcal{B}(36\,;\,0{,}78)$.

2°) $p(S=k) = \dbinom{36}{k} p^k (1-p)^{36-k}$ donc $p(S=0) = (1-p)^{36} \simeq 2.10^{-24}$
$\simeq \boxed{0}$

3°) $p(S \geq 34) = p(S=34) + p(S=35) + p(S=36) \simeq \boxed{0{,}008}$

4°) On cherche l'espérance $E(S) = np = 28{,}08$. Il y aura donc en moyenne $36 - E(S) = \boxed{7{,}92}$ redoublant (soit, à peu près 8.)

C 1°) Le théorème de Moivre-Laplace s'applique car $n \geq 30$, $np \geq 15$ et $npq \geq 5$. Ah ben non. $npq \simeq 6{,}2$. On ne devrait donc pas pouvoir l'utiliser. T suit $\mathcal{N}(28{,}08\,;\,6{,}1776)$.

2°) $p(T \geq 34) \simeq \boxed{0{,}009}$ (calculatrice) L'approximation reste correcte par rapport à B.3.

3°) $p(10 \leq T \leq 30) \simeq \boxed{0{,}78}$

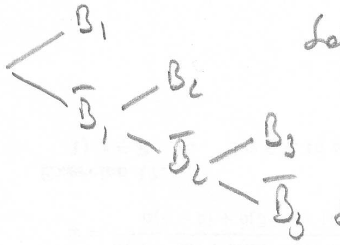
4°) On doit centrer et réduire afin d'utiliser la symétrie

Soit $Z = \dfrac{T - 28{,}08}{\sigma}$. On cherche u_α tel que $P(-u_\alpha \leq Z \leq u_\alpha) = 0{,}95$

i.e. $2P(Z \leq u_\alpha) - 1 = 0{,}95$. Ce qui donne avec la calculatrice $u_\alpha \simeq 1{,}96$

On trouve donc $\boxed{a \simeq 23{,}208}$ et $\boxed{b \simeq 32{,}952}$

D (Il s'agit d'une loi géométrique sans le dire)



Soit B_i l'évènement "Gulliver a le bac à la $i^{\text{ème}}$ tentative".

On a, là encore, la répétition de schémas de Bernoulli. Mais l'épreuve s'arrête au premier succès.

1°) $p(B_3) = p(\bar B_1)\times p_{\bar B_1}(\bar B_2)\times p_{\bar B_1\cap\bar B_2}(B_3) = 0{,}22^2\times 0{,}78 \simeq \boxed{0{,}038}$

2°) $p(B_1)+p(B_2)+p(B_3) = p(B_1\cup B_2\cup B_3)$ évènements disjoints

$= 0{,}78 + 0{,}22\times0{,}78 + 0{,}22^2\times 0{,}78 \simeq \boxed{0{,}989}$

3°) $p(\bar B_1\cap\bar B_2\cap\bar B_3\cap\bar B_4\cap\bar B_5) = (0{,}22)^5$ évènements indépendants.

$\simeq 5.10^{-4} \simeq \boxed{0{,}001}$

4°) On cherche $p_n = \sum_{i=1}^{n} p(B_i) = \sum_{i=1}^{n} (0{,}22)^{i-1}\times 0{,}78 = 0{,}78\times\sum_{i=0}^{n-1}0{,}22^i$

$= \cancel{0{,}78}\times \frac{1-0{,}22^n}{\cancel{1-0{,}22}}$ (somme des termes d'une suite géométrique)

$=\boxed{1-0{,}22^n}$

5°) On veut $p_n \geq 0{,}99 \iff 1-0{,}22^n\geq 0{,}99 \iff 0{,}22^n\leq 0{,}01$

$\iff n\ln(0{,}22)\leq \ln(0{,}01)$ car ln croissante sur $]0;+\infty[$

$\iff n \geq \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}22)}$ car $\ln(0{,}22)<0$.

Donc $n>3{,}04$ $\boxed{n_0=4}$

E

1°) $p(Y\leq 3) = \int_0^3 \lambda e^{-\lambda t}\,dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^3 = 1-e^{-3\lambda}$

$1-e^{-3\lambda}=0{,}99 \iff 0{,}01 = e^{-3\lambda} \iff \ln 0{,}01 = -3\lambda$ car ln bijective de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$

$\iff \lambda = \frac{-\ln 0{,}01}{3}$ Donc $\boxed{\lambda\simeq 1{,}535}$

2°) On cherche $P(Y>2) = 1-P(Y\leq 2) = 1-(1-e^{-2\lambda}) = e^{-2\lambda}\simeq \boxed{0{,}046}$

3°) On veut $P_{(Y>5)}(Y>7) = P(Y>2) \simeq \boxed{0{,}046}$

car la loi exponentielle est sans mémoire