
Cardan

Méthode de Cardan[1] ou plutôt Méthode de Tartaglia[2]


Tartaglia

Le but de cette feuille est de découvrir la méthode que Cardan a volé à Tartaglia pour résoudre les équations polynomiales de degré 3.

On part avec une équation de degré 3 : $\boxed{az^3+bz^2+cz+d=0}$ où $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$.

1. Montrer que l'on peut se ramener à une équation de degré 3 sans terme de degré 2 de la forme $\boxed{x^3+px+q=0}$ en posant $z=x-\dfrac{b}{3a}$. Vérifier que l'on a alors $p=\dfrac{-b^2}{3a^2}+\dfrac{c}{a}$ et $q=\dfrac{b}{27a}\left(\dfrac{2b^2}{a^2}-\dfrac{9c}{a}\right)+\dfrac{d}{a}$.

2. En posant $x=u+v$, montrer que l'on trouve $u^3+v^3+(3uv+p)(u+v)+q=0$.

3. On peut alors choisir u et v tels que $3uv+p=0$. Montrer que l'on a alors u et v solutions du système (S) $\begin{cases}(uv)^3=\dfrac{-p^3}{27}\\ u^3+v^3=-q\end{cases}$.

4. En déduire que u^3 et v^3 sont racines de $X^2+qX-\dfrac{p^3}{27}$.

On pose $\Delta=q^2+\dfrac{4}{27}p^3$ le discriminant de ce polynôme.

5. Si $\boxed{\Delta>0}$, la résolution de l'équation de degré 2 donne $u^3=\dfrac{-q+\sqrt{\Delta}}{2}$ et $v^3=\dfrac{-q-\sqrt{\Delta}}{2}$. Utiliser alors le théorème de bijection monotone pour montrer que $u=\sqrt[3]{\dfrac{-q+\sqrt{\Delta}}{2}}$ et $v=\sqrt[3]{\dfrac{-q-\sqrt{\Delta}}{2}}$. En déduire que l'équation de départ a **une solution réelle** $(z_1=u+v)$ et **deux complexes** $(z_2=ju+j^2v$ et $z_3=j^2u+jv)$.

6. Si $\boxed{\Delta=0}$, il y a **deux solutions réelles** (une racine simple $z_1=2\sqrt[3]{\dfrac{-q}{2}}=-2\sqrt{\dfrac{-p}{3}}=\dfrac{3q}{p}$ et une double $z_2=z_3=-\sqrt[3]{\dfrac{-q}{2}}=\sqrt{\dfrac{-p}{3}}=\dfrac{-3q}{2p}$)

7. Si $\boxed{\Delta<0}$, alors en posant $u=\sqrt[3]{\dfrac{-q+i\sqrt{-\Delta}}{2}}$ on trouve que l'équation de départ a **trois solutions réelles** $(z_1=u+\overline{u},\ z_2=ju+\overline{ju}$ et $z_3=j^2u+\overline{j^2u})$.

---

[1] Girolamo Cardan. (1501-1576), médecin, mathématicien, physicien, parjure et avide.

[2] Nicolo Tartaglia (1500-1557), né Fontana, il porte la barbe pour cacher les cicatrices au visage que lui ont laissées les français en saccageant Brescia.