Classe : $T^{ale}S$ TEST PRéBAC N°1

Nom : *(j'y vais mais j'ai peur !)*

(2h)

Il est conseillé de faire cette feuille en 2h au plus (de préférence le matin). Ensuite un quart d'heure avec le cours pour compléter les formules oubliées. Le lendemain, reprendre ladite feuille et compléter avec la correction.

1. On recherche une approximation via la méthode d'Euler de la courbe solution de $\begin{cases} y' = 2y+1 \\ y(0)=1 \end{cases}$. a) Calculer les trois premiers points de l'approximation dont le pas est h=1. b) Déterminer la solution du système directement.	a) On commence par le point A(0 ;1). Pour le point suivant, on assimile la courbe à une droite de coefficient directeur y'(0)=2y(0)+1=3, d'où y(1)=4 et voila notre deuxième point B(1 ;4). Et on recommence : y'(1)=2y(1)+1=9. D'où le troisième point cherché C(2 ;13). b) On cherche les solutions générale de l'équation sans second membre : y'=2y. On obtient $y_0(x) = K\exp(2x)$ avec K réel. On détermine ensuite une solution particulière : Ici $y_1(x) = \frac{-1}{2}$. On trouve alors les solutions : $y(x) = y_0(x) + y_1(x) = \frac{-1}{2} + K\exp(2x)$ avec $K \in \mathbb{R}$. D'où avec la condition initiale : $\boxed{y(x) = \frac{-1}{2} + \frac{3}{2}\exp(2x)}$
2. Résoudre $\exp(2x+5) = \exp\left(\frac{3}{x}\right)$	$S = \left\{-3; \frac{1}{2}\right\}$
3. Résoudre $\exp(x^2-4) \le \exp(-3x)$	$S = [-4;1]$
4. Résoudre $e^{x^2} = (e^{-x})^2 e^3$	$S = \left]-\infty; \frac{-1}{3}\right]$
5.Montrer que a) $\frac{e^{2x}-1}{e^x+1} = e^x \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-x}}$ b) $(e^x+e^{-x})^2 - (e^x-e^{-x})^2 = 4$	a) Mettre exp(-x) en facteur dans le terme de droite en haut et en bas. b) Développer pour les moins futés et factoriser pour les autres.
6. Déterminer les équations des tangentes à la courbe exponentielle en 0, puis 1 et enfin *a* quelconque. Etudier la position de la courbe par rapport cette dernière.	En 0 : on obtient y=x+1 et en 1 : on a y=ex La courbe est toujours au-dessus (l'exponentiel est convexe).
7. Ecrire la dérivabilité et la dérivée de $x \mapsto e^{-2x+3}$	$x \mapsto -2x+3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{R}$. exp est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc la fonction considérée est dérivable sur $\mathbb{R}$. On utilise la formule $\left(e^u\right)' = u'e^u$ pour obtenir la dérivée : $x \mapsto -2e^{-2x+3}$
8. Montrer que pour tout entier n, on a : $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \le e \le \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ En déduire la limite de	On part de $e^x \ge x+1$, et en posant $x = \frac{1}{n}$ on obtient l'inégalité de gauche. Avec le même point de départ, si x<1, on trouve $e^x \le \frac{1}{1-x}$. Ce qui donne en

$u_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$	remplaçant par x par $\frac{1}{n+1}$ la partie de droite. On trouve alors $0\le e-u_n\le \frac{3}{n}$ et par encadrement, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e}$
9. Résoudre $2y'+y=1$. Déterminer la solution dont la courbe passe par le point de coordonnées (-1 ;2).	Même tactique que pour la première question : $y(x)=e^{\frac{-1}{2}(x+1)}+1$
10. On note $H_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ la série harmonique. Montrer que $H_{2n}-H_n\ge\frac{1}{2}$. En déduire que $H_{2^n}\ge 1+\frac{n}{2}$. Quelle est la limite de cette suite ?	On a $H_{2n}-H_n\ge n\times\frac{1}{2n}$ en regardant le terme le plus petit de la somme de la série harmonique. Il suffit ensuite d'additionner les $H_{2^n}-H_{2^{n-1}}\ge\frac{1}{2}$ et le télescopage donne la deuxième inégalité cherchée. Par comparaison, la limite est alors infinie.
11. Démontrer, en n'utilisant que la définition, que la suite de terme général $u_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$ tend vers 0.	Pour tout $\varepsilon>0$, on cherche n_0 tel que si $n>n_0$, alors $\lvert u_n\rvert<\varepsilon$. Autrement dit $\frac{1}{\sqrt{n}}<\varepsilon \Leftrightarrow n>\frac{1}{\varepsilon^2}$. Il suffit alors de prendre $n_0=\mathrm{E}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$
12. Déterminer, à l'aide de la définition, les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x-2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}$	Soit $\varepsilon>0$, il existe A tel que si x>A, alors $\left\lvert\frac{1}{x-2}\right\rvert<\varepsilon$. En effet, il suffit de prendre $A=\frac{1}{\varepsilon}+2$. De même, il suffit de prendre $A=M^2$ pour la racine carrée.
13. Déterminer le comportement asymptotique de $f:x\mapsto x+1+e^{-x}$.	La droite d'équation y=x+1 est asymptote oblique en $+\infty$. D'autre part $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$, d'où une branche asymptotique de direction (Oy) en $-\infty$.
14. Déterminer la limite de $f:x\mapsto x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ en 0.	Par encadrement, on trouve 0.
15. Etudier la limite en 0 de $f:x\mapsto\frac{2-\cos(x)}{x}$	Si $x>0$, alors $\frac{2-\cos(x)}{x}\ge\frac{1}{x}$, d'où $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{2-\cos(x)}{x}=+\infty$ Et si $x<0$, alors $\frac{2-\cos(x)}{x}\le\frac{1}{x}$, d'où $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{2-\cos(x)}{x}=-\infty$
16. Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition de $f:x\mapsto\frac{x^3-2x+3}{-x^2+x}$ En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}+1}{e^x+3}$	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-1$ par factorisation. Idem en $-\infty$. $\lim\limits_{x\to1}f(x)=-4$ par simplification. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}f(x)=+\infty$ D'où, par changement de variable, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}+1}{e^x+3}=+\infty$

17. Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition de $f: x \mapsto e^{-(x^2+3x)}$	On obtient par composition : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$
18. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$	On se ramène à sin(x)/x via un changement de variable et on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)=1$
19. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3\times(0,2)^n-1}{(0,2)^n+4}$	On étudie $f: x \mapsto \dfrac{3x-1}{x+4}$ qui est continue en 0 pour obtenir : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\dfrac{-1}{4}$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3\times(0,2)^n-1}{(0,2)^n+4}=\dfrac{-1}{4}$
20. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-x}\right)$	Par expression conjuguée : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2+x}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2-x}}=\dfrac{1}{2}$ par factorisation.