Classe : T^{ale}S

Nom :

TEST PRéBAC N°2

(j'y vais mais j'ai peur !)

(2h)

Il est conseillé de faire cette feuille en 2h au plus (de préférence le matin). Ensuite un quart d'heure avec le cours pour compléter les formules oubliées. Le lendemain, reprendre ladite feuille et compléter avec la correction.

1. En faisant intervenir deux suites, montrer que $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en 0.	Vu en cours, il faut prendre : $u_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$ et $v_n = \dfrac{1}{\frac{-\pi}{2}+2n\pi}$ qui tendent toutes les deux vers 0. Mais $\sin\left(\frac{1}{u_n}\right)=1$ et $\sin\left(\frac{1}{v_n}\right)=-1$. Donc pas de limite.
2. La fonction $f : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est-elle dérivable en 0 ? en -1 ?	Le calcul du taux est $\tau_{f,1}(h)=\sqrt{\frac{2}{h}-1}$, d'où la limite $\lim\limits_{h\to 0}\tau_{f,1}(h)=+\infty$ et , si la fonction n'est pas dérivable en 1, la courbe admet une demi-tangente verticale. En revanche, la fonction est dérivable en 0 et on a $f'(0)=0$.
3. Montrer que les courbes représentatives de $f : x \mapsto e^{-x}$ et $g : x \mapsto e^{-x}\sin(x)$ ont un seul point commun et que les tangentes en ce point sont parallèles.	Il faut et il suffit que $\sin(x)=1 \Leftrightarrow x \equiv \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$. Donc sur l'intervalle, un seul point commun $A\left(\frac{\pi}{2};e^{\frac{-\pi}{2}}\right)$. On calcule les dérivées en $\frac{\pi}{2}$ et on trouve $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=g'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-e^{\frac{-\pi}{2}}$
4. Dérivabilités et dérivées de $f : x \mapsto (x-1)\sqrt{x}$, $g : x \mapsto \dfrac{x^2+1}{e^x}$ et $h : x \mapsto \sin\left(-2x+\frac{\pi}{3}\right)$.	Pour *f* ; On a $x \mapsto \sqrt{x}$ qui est dérivable sur $]0;+\infty[$, le polynôme $x \mapsto x+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc *f* est dérivable sur $]0;+\infty[$, et $f'(x)=\dfrac{3x-1}{2\sqrt{x}}$. Pour *g* : elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ car l'exponentiel ne s'annule pas. Et $g'(x)=\dfrac{-(x-1)^2}{e^x}$. Pour *h*, pas de problème pour la dérivabilité par composition et $h'(x)=-2\cos\left(-2x+\frac{\pi}{3}\right)$
5. Déterminer les variations de $f : x \mapsto 3x^4-8x^3+6x^2-3$	La dérivée $f' : x \mapsto 12x(x-1)^2$ s'annule en 0 et 1, mais ne change pas de signe en 1. Donc *f* est décroissante sur $]-\infty;0]$ et croissante sur $[0;+\infty[$.
6. Déterminer les variations de $f : x \mapsto e^{-x}\sin(x)$.	Il suffit de l'étudier sur $[0;\pi]$, même si ce n'est pas à proprement parlé une période. La fonction *f* est croissante sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{\pi}{4};\pi\right]$
7. Déterminer les variations de $f : x \mapsto \cos^2(x)$.	La fonction *f* est périodique et paire.. Donc étude sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ sur lequel elle est décroissante.
8. Tangente en 0 et position relative de la courbe de la tangente.	Equation de la tangente : *y*=*x*. La courbe est au-dessus à droite de 0 et au-dessous à gauche.

9. Axe de symétrie et asymptote de la courbe représentative de $f : x \mapsto \sqrt{x^2+1}$	La fonction est paire, donc l'axe des ordonnées est axe de symétire. Asymptotes : $y=x$ en $+\infty$ et $y=-x$ en $-\infty$
10. Résoudre $y - y' = \frac{e^x}{x^2}$.	La difficulté est dans la solution particulière : $y_1(x) = \frac{e^x}{x}$. Et la solution générale est $y(x) = y_0(x) + y_1(x) = Ke^x + \frac{e^x}{x}$ avec $K \in \mathbb{R}$
11. La fonction $f : x \mapsto x \times \mathrm{E}(x)$ est-elle continue sur [-1 ;2] ?	Partout continue, sauf en 1.
12. Démontrer que l'équation $\cos(2x) = 2\sin(x) - 2$ Admet au moins une solution dans l'intervalle $\left[\frac{-\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]$	Théorème des valeurs intermédiaires.
13. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $e^x + x + 1 = 0$. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-1} des solutions.	La fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème de bijection monotone, il n'y a qu'une seule solution : $-1,3 < \alpha < -1,2$
14. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $e^x - x^2 = 0$. Donner une valeur approchée à 10^{-2} des solutions.	Une seule solution en distinguant les positifs des négatifs. $\alpha \simeq -0,70$
15. Résoudre a) $\ln(x) = -5$. b) $\ln(2x-1) > -2$ c) $\ln(1+x) \leq 100$	a) $S = \{e^{-5}\}$ b) $S = \left]\frac{1+e^{-2}}{2};+\infty\right[$ c) $S = \left]-1;-1+e^{100}\right]$
16. Résoudre a) $\ln(x^2-4) = \ln(x)$. b) $\ln(x^2-4) < \ln(x)$	a) $S = \left\{\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right\}$ b) $S = \left]2;\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right[$
17. Résoudre a) $\ln(x+1) + \ln(x+3) = \ln(x+7)$ b) $\ln(x^2-3) \leq \ln(x) + \ln(2)$	a) $S = \{1\}$ b) $S = \left]\sqrt{3};3\right]$

18. Résoudre a) $2(\ln(x))^2+5\ln(x)-3=0$ b) $2(\ln(x))^2+5\ln(x)-3>0$	a) $S=\left\{e^{-3};e^{\frac{1}{2}}\right\}$ et b) $S=\left]0;e^{-3}\right[\cup\left]e^{\frac{1}{2}};+\infty\right[$
19. Variations de $f:x\mapsto(\ln(x))^2$	Décroissante sur $[0;1]$ et croissante sur $[1;+\infty[$.
20. Variations de $f:x\mapsto-\ln(\cos(x))$	La fonction est périodique de période 2π et n'a de sens que si le cosinus est strictement positif. Elle est de plus paire et il suffit de l'étudier sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ où elle est croisante.