Classe : T^ale S
Nom :

TEST PRéBAC N°4

(j'y vais mais j'ai peur !)

(2h)

Il est conseillé de faire cette feuille en 2h au plus (de préférence le matin). Ensuite un quart d'heure avec le cours pour compléter les formules oubliées. Le lendemain, reprendre ladite feuille et compléter avec la correction.

1. On considère l'aire hypographe A de la courbe d'équation $y = x^2$ sur l'intervalle [0 ;1]. a) Montrer que $\underbrace{\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}}_{u_n} \le A \le \underbrace{\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}}_{v_n}$ b) Montrer que ces deux suites sont adjacentes et en déduire A.	Fais en cours, intro sur les intégrales.
2. On demande d'encadrer l'aire hypographe de la courbe d'équation $y = \sqrt{x}$ sur [0 ;4] en considérant des carrés d'aire 1, puis 0,5 et enfin 0,1. On fera un graphique précis pour répondre.	Avec un quadrillage de plus en plus fin, on trouve tour à tour : $3 < A < 7$, $4 < A < 6,5$ et $5,04 < A < 5,62$,
3. Déterminer, sans calculer de primitives les aires suivantes : a) $\int_0^1 x\,dx$ et b) $\int_1^3 (2t+1)dt$	$\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$ et $\int_1^3 (2t+1)dt = 10$ avec les aires des trapèzes.
4. Calculer $\int_0^4 \mathrm{E}(x)dx$.	en théorie, pas de solution car cette fonction n'est pas continue. En pratique, on peut la couper via Chasles en quatre intégrales et on trouve alors $\int_0^4 \mathrm{E}(x)dx = 6$
5. Calculer la valeur moyenne de la fonction carré sur [0 ;1] .	$\mu = \frac{1}{1-0}\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$
6. Calculer $\int_{-3}^3 f(x)dx$ pour la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} -2x-6 & \text{si } x \in [-3;-2] \\ x & \text{si } x \in [-2;3] \end{cases}$	$\int_{-3}^3 f(x)dx = \frac{3}{2}$

7. En utilisant la réponse à la question **1** et les transformations, déterminer l'intégrale $\int_1^2 -(x-1)^2\,dx$.

Il suffit de tracer la courbe pour trouver la même intégrale qu'au début, mais négative : $\int_1^2 -(x-1)^2\,dx = -\int_0^1 x^2 dx = \frac{-1}{3}$

8. Calculer $\int_0^1 (x^2+5x-3)dx$.

$\int_0^1 (x^2+5x-3)dx = \frac{-1}{6}$

9. Déterminer $\int_{-2}^1 f(x)dx$ pour $f : x \mapsto \begin{cases} x+3 \text{ si } x \in [-2;0] \\ 3-x^2 \text{ si } x \in]0;1] \end{cases}$

$\int_{-2}^1 f(x)dx = \frac{20}{3}$

10. En majorant $\frac{t}{1+t^2}$, montrer que $\int_0^1 \frac{t}{1+t^2}dt \le \frac{1}{2}$.

On a $\frac{t}{1+t^2} \le t$ si $t \in [0;1]$. D'où le résultat en passant aux intégrales.

11. Déterminer les primitives de $f : x \mapsto \frac{1}{x^2} + 12x^3 - 5$.

$F(x) = \frac{-1}{x} + 3x^4 - 5x + K$ avec $K \in \mathbb{R}$

12. Idem avec :

a) $x \mapsto x^4 - 4x^3 - 5x^2 + \frac{7}{3}x + 2$.

b) $x \mapsto -\sin(x) + 2\cos(x)$.

c) $x \mapsto 2x - 4 + \frac{3}{x^2}$

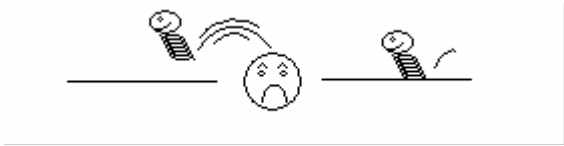
d) $x \mapsto 2^x$

a) $F(x) = \frac{x^5}{5} - x^4 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{7}{6}x^2 + 2x + K$ avec $K \in \mathbb{R}$

b) $F(x) = \cos(x) + 2\sin(x) + K$ avec $K \in \mathbb{R}$

c) $F(x) = x^2 - 4x - \frac{3}{x} + K$ avec $K \in \mathbb{R}$

d) $F(x) = \frac{1}{\ln 2}2^x + K$ avec $K \in \mathbb{R}$

13. Idem avec : a) $x \mapsto x^2(x^3-1)^5$. b) $x \mapsto \dfrac{3x}{\sqrt{x^2-1}}$. c) $x \mapsto \dfrac{x}{x^2-4}$ d) $x \mapsto \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$	a) $F(x)=\dfrac{1}{18}(x^3-1)^6+K$ avec $K \in \mathbb{R}$ b) $F(x)=3\sqrt{x^2-1}+K$ avec $K \in \mathbb{R}$ c) $F(x)=\dfrac{1}{2}\ln\left\|x^2-4\right\|+K$ avec $K \in \mathbb{R}$ d) $F(x)=-e^{\frac{1}{x}}+K$ avec $K \in \mathbb{R}$
14. Calculer les intégrales : a) $\int_1^e \dfrac{\ln(x)}{x}dx$ b) $\int_e^{e^3} \dfrac{1}{x\ln(x)}dx$	$\int_1^e \dfrac{\ln(x)}{x}dx=\dfrac{1}{2}$ et $\int_e^{e^3} \dfrac{1}{x\ln(x)}dx=\ln 3$
15. Etudier les variations de $x \mapsto \int_0^x \dfrac{dt}{1+t^2}$	Strictement croissante.
16. Calculer $\int_1^x \ln(t)dt$.	$\int_1^x \ln(t)dt = x\ln x - x + 1$ à l'aide d'une intégration par parties.
17. Calculer : a) $\int_1^e x\ln x\,dx$. b) $\int_0^{\ln 3}(x-1)e^x dx$	$\int_1^e x\ln x\,dx=\dfrac{e^2+1}{4}$ et $\int_0^{\ln 3}(x-1)e^x dx=3\ln 3-4$ (idem)
18. Déterminer $\int_0^{\pi} \sin^4(x)dx$	Linéariser voir cours.

19. Retrouver la formule du volume de la sphère.	Voir cours.
20. Calculer $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\left(e^{x}-e^{-x}\right)^{2}}{\sin x} dx$	$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\left(e^{x}-e^{-x}\right)^{2}}{\sin x} dx = 0$ La fonction est impaire.