Classe : T^{ale}S

TEST PRéBAC N°5

(j'y vais mais j'ai peur !)

(2h)

Nom :

Il est conseillé de faire cette feuille en 2h au plus (de préférence le matin). Ensuite un quart d'heure avec le cours pour compléter les formules oubliées. Le lendemain, reprendre ladite feuille et compléter avec la correction.

1. Soit M le point d'affixe $z=x+iy$. Déterminer les affixes des points M',M'' et M''' respectivement symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses, à l'axe des ordonnées et au point O.	M' a pour affixe $\overline{z} = x - iy$. M'' a pour affixe $-\overline{z} = -x + iy$. M''' a pour affixe $-z = -x - iy$.
2. Ecrire sous forme algébrique les complexes : $z_1 = (2+i\sqrt{3})(5-i) + \left(\frac{1}{2}+3i\right)^2$, $z_2 = \frac{1}{\sqrt{3}+2i}$ et $z_3 = \frac{1+4i}{1-i\sqrt{2}}$	$z_1 = \left(\frac{5}{4}+\sqrt{3}\right) + i\left(1+5\sqrt{3}\right)$ $z_2 = \frac{\sqrt{3}}{7} - \frac{2}{7}i$ $z_3 = \frac{1-4\sqrt{2}}{3} + i\frac{4+\sqrt{2}}{3}$
3. Déterminer i^n pour $n \in \mathbb{Z}$	$i^k = \begin{cases} 1 \text{ si } k \equiv 0\,(4) \\ i \text{ si } k \equiv 1\,(4) \\ -1 \text{ si } k \equiv 2\,(4) \\ -i \text{ si } k \equiv 3\,(4) \end{cases}$
4. Les points A, B, C et D ont pour affixes respectives $3+i$, $2-2i$, $2i$ et $1+5i$. Démontrer de deux façons différentes que ABCD est un parallélogramme.	1ere méthode : calculer les affixes de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ et on trouve $-1-3i$. 2^e méthode : Calculer les coordonnées du milieu de [AC] et [BD]. On trouve $\frac{3}{2}(1+i)$.
5. On pose $z_1 = \frac{3-i}{5+7i}$ et $z_2 = \frac{3+i}{5-7i}$ Montrer, sans aucun calcul que $z_1 - z_2$ est un imaginaire pur.	$z_1 = \overline{z_2}$
6. On pose $P(z) = z^3 + z^2 - 4z + 6$. Montrer sans aucun calcul que si z_1 est racine de P, alors $\overline{z_1}$ l'est aussi.	$P(\overline{z_1}) = \overline{z_1}^3 + \overline{z_1}^2 - 4\overline{z_1} + 6 = \overline{z_1^3} + \overline{z_1^2} - 4\overline{z_1} + 6 = \overline{z_1^3 + z_1^2 - 4z_1 + 6} = \overline{P(z_1)} = \overline{0} = 0$ En fait, ça marche plus généralement avec un polynôme à coefficients réels.
7. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $z^2 + \overline{z} \in \mathbb{R}$	On pose $Z = z^2 + \overline{z}$ <u>1ere méthode :</u> L'hypothèse $z^2 + \overline{z} \in \mathbb{R}$ équivaut à $\mathrm{Im}(Z) = 0$. Et on passe à la forme algébrique : $Z = x^2 - y^2 + x + (2xy - y)i$ avec $z = x + iy$.

	On trouve donc $y(2x-1)=0 \Leftrightarrow y=0$ ou $x=\frac{1}{2}$ Deux droites donc. 2e méthode : (*moins évident*) L'hypothèse $z^2+\bar{z}\in\mathbb{R}$ équivaut à $Z=\bar{Z}$. D'où $z^2+\bar{z}=\overline{z^2+\bar{z}} \Leftrightarrow z^2+\bar{z}=\bar{z}^2+z$ $\Leftrightarrow (z-\bar{z})(z+\bar{z})-(z-\bar{z})=0$ $\Leftrightarrow (z-\bar{z})(z+\bar{z}-1)=0$ $\Leftrightarrow z=\bar{z}$ ou $z+\bar{z}=1$ Donc z est réel ou $\mathrm{Re}(z)=\frac{1}{2}$.
8. Déterminer les modules et arguments des complexes : $3;\ -4;\ -1+i$ et $2-2i$.	$\|3\|=3$ et $\arg(3)\equiv 0\ (2\pi)$ $\|-4\|=4$ et $\arg(-4)\equiv\pi\ (2\pi)$ $\|-1+i\|=\sqrt{2}$ et $\arg(-1+i)\equiv\frac{3\pi}{4}\ (2\pi)$ $\|2-2i\|=2\sqrt{2}$ et $\arg(2-2i)\equiv\frac{-\pi}{4}\ (2\pi)$
9. Déterminer la forme trigonométrique de $z=\sqrt{6}+i\sqrt{2}$.	$z=2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$
10. Déterminer les formes trigonométriques de $z_1=-2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$ et $z_2=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$	$z_1=2\left(\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)\right)$ $z_2=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$
11. Ecrire $\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2008}$ sous forme trigonométrique, exponentielle et algébrique.	On a $\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$ d'où $\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2008}=\left(e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^{2008}=e^{-i\frac{\pi}{3}\times 2008}=e^{\left(-335\times 2\pi+\frac{2\pi}{3}\right)i}=e^{\frac{2i\pi}{3}}$ Ce qui donne pour la trigonométrique : $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ et pour l'algébrique : $\frac{-1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$
12. Ecrire $z_1=\sqrt{3}-i$ et $z_2=1-i$ sous forme trigonométrique. Déduire de $\frac{z_1}{z_2}$ les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.	$z_1=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$ et $z_2=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ D'où $Z=\frac{z_1}{z_2}=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)=\frac{\sqrt{3}-i}{1-i}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}+i\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ Et $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

13. Déterminer l'ensemble des point M d'affixe z tels que $\frac{z-2}{z+i} \in \mathbb{R}$.	On note A et B les points d'affixes $-i$ et 2. On a alors $\frac{z-2}{z+i} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} z=2 \text{ ou} \\ z \neq 2 \text{ et } z \neq -i, \arg\left(\frac{z-2}{z+i}\right) \equiv \left(\overrightarrow{\mathrm{AM}}, \overrightarrow{\mathrm{BM}}\right) (2\pi) \end{cases}$ Ce qui donne M=B ou $\left(\overrightarrow{\mathrm{AM}}, \overrightarrow{\mathrm{BM}}\right) \equiv 0\,(\pi)$ (avec $\mathrm{M} \neq \mathrm{A}$ et $\mathrm{M} \neq \mathrm{B}$). On trouve donc la droite (AB) sans le point A.
14. Ecrire sous forme algébrique $6e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et sous forme exponentielle $\left(\sqrt{3}-i\right)^5$.	$6e^{i\frac{2\pi}{3}} = -3+3\sqrt{3}i$ Et $\left(\sqrt{3}-i\right)^5 = 32e^{\frac{-i5\pi}{6}}$
15. L'homothétie h est centre I d'affixe 1+i et de rapport 2. Donner l'écriture complexe de h.	$z'-1-i = 2(z-1-i) \Leftrightarrow \boxed{z' = 2(z-1-i)+1+i}$
16. Résoudre $z^2 - 2\cos(\theta)z + 1 = 0$ en fonction de θ.	$\Delta = -4\sin^2\theta$ Si $\theta \equiv 0\,(2\pi)$, une seule solution : 1 Si $\theta \equiv \pi\,(2\pi)$, une seule solution : -1 Sinon, deux solutions : $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$
17. Trouver les racines de $P(z) = z^4 - 4z^3 + 4z^2 - 4z + 3$	Les complexes i et $-i$ sont racines évidentes. On peut donc factoriser P par $z^2+1 = (z-i)(z+i)$. On effectue la division euclidienne ou l'identification pour trouver $P(z) = (z^2+1)(z^2-4z+3)$. Les réels 1 et 3 sont racines évidentes. D'où les racines : i, -i, 1 et 3.
18. Résoudre $z^2 - \overline{z} + \frac{1}{4} = 0$.	On repasse à la forme algébrique et on obtient : $x^2 - y^2 - x + \frac{1}{4} + i(2xy+y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 - x + \frac{1}{4} = 0 \\ (2x+1)y = 0 \end{cases}$ Soit $\begin{cases} y=0 \\ x^2 - x + \frac{1}{4} = 0 \end{cases}$, soit $\begin{cases} x = \frac{-1}{2} \\ y^2 = 1 \end{cases}$. On obtient donc $S = \left\{\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}+i, \frac{-1}{2}-i\right\}$.
19. Quelle est la nature de la transformation qui à z associe $z' = i(z+1)+1$?	On cherche d'abord les invariants. Soit à résoudre $\omega = i(\omega+1)+1 \Leftrightarrow \omega = i$. On factorise $z'-i = i(z-i) = e^{i\frac{\pi}{2}}(z-i)$. Il s'agit donc d'un quart de tour direct de centre le point d'affixe i.

20. Les points A et B ont pour affixes *a* et *b*. Déterminer C tel que ABC soit rectangle isocèle en A.	On ne dit pas s'il est direct ou indirect. Il y a donc deux solutions qui sont les points dont les affixes sont les images de *b* par les quarts de tour direct et indirect de centre A. $z'-a=i(z-a)$ et $z'-a=-i(z-a)$ D'où les solutions $a+i(b-a)$ et $a-i(b-a)$