Classe : T^{ale}S
Nom :

TEST PRéBAC N°7

(j'y vais mais j'ai peur !)

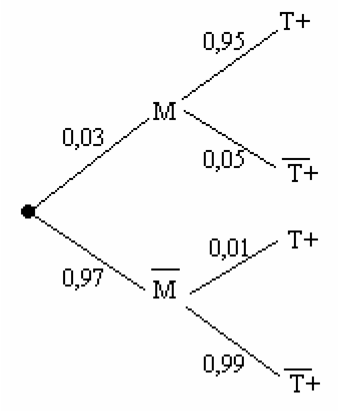
(2h)

Il est conseillé de faire cette feuille en 2h au plus (de préférence le matin). Ensuite un quart d'heure avec le cours pour compléter les formules oubliées. Le lendemain, reprendre ladite feuille et compléter avec la correction.

1. Une société comprend 40% de cadres, 20% d'entre eux parlent anglais. On interroge au hasard un employé. Soit C l'évènement : « l'employé est un cadre » et l'évènement A : « l'employé parle anglais. Calculer $p_C(A)$ puis $p(C\cap A)$.	$p(C)$=0,4 et $p_C(A)=0,2$. $p(C\cap A)=p_C(A)\times p(C)=0,08$
2. Dans une population, 60% ont une voiture, 65% un téléviseur et 24% n'ont ni voiture, ni téléviseur. On choisit un individu au hasard, calculer la probabilité que cette personne ait une voiture sachant qu'elle possède un téléviseur.	$p(V)$=0,6, $p(T)$=0,65 et $p(\overline{V\cup T})=0,24$. Donc $p(V\cup T)=0,76$ et $p(V\cap T)=p(V)+p(T)-p(V\cup T)=0,49$. D'où $p_T(V)=0,75$
3. On fait l'hypothèse que chacun des moteurs d'un avion bimoteur tombe en panne avec une probabilité égale à 0,0001 et ceci d'une façon indépendante de l'autre moteur. Quelle est la probabilité que l'avion arrive à bon port sachant qu'il peut voler avec un seul moteur.	On note A l'évènement le moteur 1 tombe en panne et B l'évènement le moteur 2 tombe en panne. $p(A\cap B)=p(A)\times p(B)=0,0001^2=10^{-8}$. (les évènements A et B sont indépendants) On cherche $p(\overline{A\cap B})=1-10^{-8}=0,99999999$.
4. On teste un médicament contre l'hyperglycémie. Dans cette expérience, 60% des malades reçoivent le médicament et le reste reçoit un placebo. On constate une baisse du taux de glycémie chez 80% des gens ayant pris le médicament et on ne constate aucune baisse pour 90% des gens ayant pris le placebo. Calculer la probabilité qu'un individu pris au hasard a une baisse du taux de glycémie.	D'après la formule des probabilités totales : $p(B)=p(B\cap M)+p(B\cap\overline{M})$ $=p_M(B)\times p(M)+p_{\overline{M}}(B)\times p(\overline{M})$ $=0,52$

<table>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>5. Sur mon trajet se trouvent trois feux tricolores fonctionnant de façon indépendante. Leur cycle est de 35s au vert, 5s à l’orange et 20s au rouge. Quelle est la probabilité que je rencontre deux feux verts exactement sur mon trajet.</td><td>$p = 3\times\frac{7}{12}\times\frac{7}{12}\times\frac{5}{12} = \frac{245}{576}$</td></tr>
<tr><td>6. Sur 5 tris au but, un joueur pris au hasard marque 5 buts avec une probabilité de 0,2, 4 buts avec une probabilité de 0,5 et 3 buts avec une probabilité de 0,3. Si ce joueur effectue deux séances de tirs au but, déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire égale au nombre de buts marqués, puis l’espérance.</td><td><table>
<tr><td>x_i</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr>
<tr><td>$p(X = x_i)$</td><td>0,09</td><td>0,3</td><td>0,37</td><td>0,2</td><td>0,04</td></tr>
</table>
D’où $E(X) = 7,8$.</td></tr>
<tr><td>7. De combien de façon un joueur peut remplir sa grille de loto (sans tenir compte du complémentaire).</td><td>Pas d’ordre, pas de remise : $\binom{49}{6} = 13\ 983\ 816$</td></tr>
<tr><td>8. Dans une urne, il y a 4 boules rouges et 5 boules vertes. On tire deux boules. Calculer la probabilité que les deux boules tirées soient rouges.</td><td>$p = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{1}{6}$</td></tr>
<tr><td>9. Démontrer que $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$</td><td>Voir cours.</td></tr>
<tr><td>10. Démontrer la formule du binôme de Newton.</td><td>Par récurrence. (voir cours)</td></tr>
</table>

11. Déduire de la formule du binôme de Newton le nombre de parties d'un ensemble à *n* éléments.	Il suffit de prendre *a*=*b*=1 dans la formule : (Pensez aux chaussettes dans votre commode.) $(1+1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$
12. Une roue de la fortune est divisée en 5 secteurs angulaires isométriques. Quatre d'entre eux indiquent « Perdu ! » et un seul indique « Gagné ! ». On lance trois fois la roue. On gagne si l'on obtient au moins une fois le « Gagné ! ». Quelle la probabilité de gagner ?	Pensez complémentaire ! Le contraire de « je gagne au moins une fois » est « j'ai perdu à chaque fois ». Donc $p=1-\left(\frac{4}{5}\right)^3=\frac{61}{125}$
13. Un élève répond au hasard à un QCM de 10 questions ayant à chaque fois une réponse juste parmi 5. Déterminer la loi de probabilité du nombre de réponses justes. Quelle est son espérance ?	Il s'agit, à chaque réponse, d'une loi de Bernoulli de paramètre *p*=1/5 de chance de succès et 1-*p* probabilité d'échec. On répète l'expérience de façon indépendante avec ces mêmes paramètres dix fois. Donc la variable aléatoire *X* du nombre de réponses justes suit une loi binomiale de paramètre (10,*p*) d'espérance $E(X)=10\times\frac{1}{5}=2$
14. On choisit un réel entre 0 et 1. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre compris entre 1/8 et 1/6 ?	La variable aléatoire du réel choisit suit une loi uniforme de paramètre [0 ;1]. Or une variable aléatoire *X* suivant une loi uniforme de paramètre [*a* ;*b*] a pour fonction à densité : $d:[a;b]\to\mathbb{R}$ $\alpha\mapsto\frac{1}{b-a}$ et pour fonctio de répartition : $F(\alpha)=P(X\le\alpha)=\int_a^\alpha d(t)dt=\frac{\alpha-a}{b-a}$. D'où ici, $p=P\left(X\le\frac{1}{6}\right)-P\left(X\le\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{6}-\frac{1}{8}=\boxed{\frac{1}{24}}$
15. La durée de vie en heure d'un composant électronique suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda=0,0006$. Quelle est la probabilité qu'un de ces composant pris au hasard ait une durée de vie inférieure 1000 heures ? Quelle est la probabilité qu'un de ces composant pris au hasard soit encore en état de marche au bout de 500 heures ?	La durée de vie X suit une loi sans vieillissement, autrement dit, une loi exponentielle de paramètre $\lambda=0,0006$. $P(X\le1000)=\int_0^{1000}\lambda e^{-\lambda t}dt=\left[-e^{-\lambda t}\right]_0^{1000}=1-e^{-1000\lambda}=\boxed{1-e^{-0,6}}$ $P(500\le X)=1-P(X<500)=1-P(X\le500)=e^{-500\lambda}=\boxed{e^{-0,03}}$ car $P(X=500)=0$.
16. Une variable aléatoire X suit une loi de probabilité exponentielle de paramètre $\lambda\in[0;+\infty[$ telle que $P(X\le70)=0,05$. Trouver λ.	$P(X\le70)=\int_0^{70}\lambda e^{-\lambda t}dt=\left[-e^{-\lambda t}\right]_0^{70}=1-e^{-70\lambda}=0,05$ D'où

	$1-e^{-70\lambda}=0,05 \Leftrightarrow e^{-70\lambda}=0,95$ $\Leftrightarrow -70\lambda=\ln(0,95)$ car ln est bijectif sur $]0;+\infty[$ à valeurs dans $\Leftrightarrow \lambda=\frac{\ln(0,95)}{-70}$ $\mathbb{R}$.
17. Déterminer l'espérance de la loi de Bernoulli de paramètre *p*.	La loi de Bernoulli a une espérance de *p*. (Faire un tableau)
18. En déduire l'espérance de la loi binomiale de paramètres *n* et *p*.	*np*. (Voir cours, linéarité de l'espérance)
19. Une maladie atteint 3% d'une population donnée. Un test de dépistage donne les résultats suivants : Chez les individus malades, 95% des tests sont positifs. Chez les individus non malades, 99% des tests sont négatifs. Quelle est la probabilité d'être malade alors que le test est négatif ?	En notant M : « être malade » et T+ : « Test positif »,  On demande donc $P_{\overline{T+}}(M)=\frac{P(M\cap\overline{T+})}{P(\overline{T+})}$. Or $P(\overline{T+})=P(\overline{T+}\cap M)+P(\overline{T+}\cap\overline{M})$ $=0,05\times0,03+0,99\times0,97$ $=0,9618$ D'où, $P_{\overline{T+}}(M)=\frac{0,0015}{0,9618}\simeq 0,002$
20. Avec le même texte, quelle est la probabilité d'être non malade alors que le test est positif ? Que pensez-vous de ce test ?	On cherche $P_{T+}(\overline{M})=\frac{P(\overline{M}\cap T+)}{P(T+)}=\frac{P(\overline{M}\cap T+)}{1-P(\overline{T+})}$ $=\frac{0,97\times0,01}{1-0,9618}\simeq 0,0382$